Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
ANÁLISE NUMÉRICA

Exame em Época Normal 17/06/2013

Parte I

1. Considere a função $f(x) = exp(x^2)$.

   (a) Determine o conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : |cond_f(x)| < 10\}$.

   (b) Admita que $\tilde{x}$ é uma aproximação de $x \neq 0$ que possui 5 algarismos significativos e que $x, \tilde{x} \in \Omega$. O que pode concluir acerca erro relativo que afecta $\tilde{y} = f(\tilde{x})$?

2. Considere a equação $e^x - 3x - 0.5 = 0$.

   (a) Identifique todas as soluções desta equação, localizando-as em intervalos de amplitude inferior a 0.5.

   (b) Analise a convergência do método de Newton para a menor solução da equação e utilize-o para obter uma aproximação com erro inferior a 0.5×10^{-4}.

3. Considere o sistema de equações não lineares

$$\left\{\begin{array}{r} 3x_1 - \cos(x_1 x_2) - \frac{1}{2} = 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{array}\right.$$

   Mostre que o sistema tem uma e uma só solução no conjunto $\Omega = [-1, 1]^3$e calcule 2 iterações no método do ponto fixo.

4. Mostre que $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, quaisquer que sejam a matriz$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e o vector $x \in \mathbb{R}^n$, para uma qualquer norma em $\mathbb{R}^n$ e respectiva norma matricial induzida.

5. Determine uma aproximação do valor próprio dominante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

   usando o método das potências. O teorema de Gershgorin permite concluir que a matriz A é invertível ?

Parte II

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f, de classe C^4.

x	-1	1	2	6
y	-1	2	3	4

   (a) Determine o polinómio interpolador de f nos pontos tabelados e, assumindo que $f(x) = \exp(-x) + q_3(x)$, onde $q_3(x)$ é um polinómio de grau 3, determine um majorante para o erro de interpolação.

   (b) Determine um polinómio W, de grau ≤ 3, tal que $x_i = W(y_i), i = 0, 1, 2, 3$ e utilize este polinómio para determinar uma aproximação de uma raíz de f.

   (c) Utilizando os pontos da tabela que considere adequados determine aproximações de $I(f) = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ utilizando o método dos trapézios e de Simpson.

   (d) Determine o valor de $\min_{a,b} \sum_{i=0}^{3} (y_i - ax_i + b)^2$.

2. Mostre se f é uma função de classe C^{n+1} tal que $f^{(n+1)}([a, b]) \subseteq [a, b])$. Então o erro de interpolação verifica a relação $|f(x) - p_n(x)| \leq \max\{|a|, |b|\}e^{b-a}$.

3. Determine uma fórmula de quadratura da forma $Q(f) = 2f(x_0) + Af(x_1)$ que seja exacta para polinómios de grau 2 no intervalo $[0, 1]$. Utilize essa fórmula para obter uma fórmula composta para calcular integrais num intervalo genérico $[a, b]$.

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(xy(x)), & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Mostre que este problema tem uma e uma só solução $y \in C^\infty(]0, 1[)$.

   (b) Aplique o método de Euler com $h = 0.1$ para calcular uma aproximação de $y(0.2)$ e determine um majorante para o erro cometido.

   (c) Determine uma nova aproximação de $y(0.2)$ usando desta vez um método de Runge-Kutta de ordem 2.