**Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão**
ANÁLISE NUMÉRICA

Exame em Época de Recurso 26/06/2013

---

## Parte I

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x - 3 - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{3}\sin x.$$

   (a) Mostre que $f$ tem uma única raíz, $z$, no intervalo $I = [2.6, 2.8]$ e, utilizando o método da bisseção, obtenha uma aproximação de $z$ com 2 algarismos significativos.

   (b) Mostre que o método de Newton converge para $z$, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in I$, e utilize-o para obter uma aproximação de $z$ com quatro algarismos significativos.

2. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{2}\cos(x_1 + x_2) \\ x_2 = 2 + \frac{1}{3}\sin(x_1 + x_2) \end{cases}.$$

   (a) Mostre que o sistema tem uma e uma só solução no conjunto $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [\frac{5}{3}, \frac{7}{3}]$.

   (b) Calcule 3 iterações do método do ponto fixo partindo de uma aproximação à sua escolha e determine um majorante para o erro cometido.

3. Considere o sistema linear $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, onde

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 6+\varepsilon & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b_\varepsilon = \begin{bmatrix} 4+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad |\varepsilon| \leq 1.$$

   (a) Sabendo que o sistema $A_0 x_0 = b_0$ (isto é, o sistema $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, com $\varepsilon = 0$) tem a solução $x_0 = (1, 1)$, determine, sem resolver o sistema, um majorante de $\|x_\varepsilon - x_0\|_1$.

   (b) Mostre a convergência do método de Gauss-Seidel, quando aplicado à resolução numérica do sistema $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$.

   (c) Determine um valor aproximado $x^{(2)}$ da solução $x_1$ do sistema $A_1 x_1 = b_1$, calculando duas iteração do método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial $x^{(0)} = (0, 0)$ e obtenha um majorante do erro absoluto $\|x_1 - x^{(2)}\|_\infty$.

## Parte II

1. Seja $p_n(x)$ o polinómio interpolador de $f(x) = \sin(\pi m x)$ nos pontos $0, h, 2h, \cdots, nh$, em que $h = 1/n$ e $m \in \mathbb{N}$.

   (a) Considerando $m = 1$, determine $p_3(x)$.

   (b) Mostre que $\lim |f(x) - p_n(x)| = 0, \quad \forall x \in [0, 1]$.

2. Determine

$$\min_{p \in \mathbb{P}_1} \int_{-1}^{1} (|x| - p(x))^2 \, dx,$$

   onde $\mathbb{P}_1$ designa o espaço dos polinómios de grau 1.

3. Determine a fórmula de Gauss com dois nós de interpolação, $Q(f) = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$, que aproxima o integral

$$I(f) = \int_{-b}^{b} x^2 f(x) \, dx,$$

   onde $f \in C([-b, b])$ e $b$ é uma constante positiva. Utilize o resultado para calcular uma aproximação de $\int_{-1}^{1} x^3 e^x \, dx$.

4. Pretende-se obter uma aproximação para o valor de $\pi$ recorrendo à fórmula

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt.$$

   Determine o menor número de pontos de integração necessários para aproximar $\pi$ com uma casa decimal de precisão, utilizando a regra dos trapézios. Calcule a referida aproximação e melhore o resultado utilizando o método de Romberg. (Nota: $\pi = 4 \arctan 1$)

5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{1 + y^2(x)}, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Aplique o método de Euler com $h = 0.1$ para calcular uma aproximação de $y(0.2)$ e determine um majorante para o erro cometido.

   (b) Determine uma nova aproximação de $y(0.2)$ usando desta vez um método de Runge-Kutta de ordem 2.