Capítulo 3

Sistemas de equações

1. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^n$. Demonstre que as seguintes aplicações definem normas em V.

(a) $\mathbf{x} \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

(b) $\mathbf{x} \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$

(c) $\mathbf{x} \mapsto \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$

2. Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que

(a) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \, \|\mathbf{x}\|_\infty$

(b) $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \, \|\mathbf{x}\|_2$

(c) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq n \, \|\mathbf{x}\|_\infty$

3. Considere o espaço vetorial das funções (reais de variável real) contínuas no intervalo $[0, 1]$, habitualmente designado por $C[0, 1]$. Mostre que as seguintes aplicações definem normas em $C[0, 1]$.

(a) $f \mapsto \max_{t \in [0,1]} |f(t)|.$

(b) $f \mapsto \int_0^1 |f(t)| \, dt.$

4. Sejam $\|\cdot\|_{V_1}$ e $\|\cdot\|_{V_2}$ normas vectoriais em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\|\mathbf{x}\|_{V_1} \le c_1 \|\mathbf{x}\|_{V_2}, \quad \|\mathbf{x}\|_{V_2} \le c_2 \|\mathbf{x}\|_{V_1}, \quad \forall_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n.$$

Prove que as normas matriciais $\|\cdot\|_{M_1}$ e $\|\cdot\|_{M_2}$ induzidas por estas normas vetoriais verificam

$$\|A\|_{M_1} \le c_1\, c_2 \|A\|_{M_2}, \quad \|A\|_{M_2} \le c_1\, c_2 \|A\|_{M_1}, \quad \forall_A \in L^n.$$

Como interpreta este resultado em termos de equivalência de normas?

5. Seja $\mathbb{L}^n$ o conjunto das matrizes invertíveis de ordem n. Mostre que se $A \in \mathbb{L}^n$ for tal que $\|A\| < 1$, então a matriz $I - A$ é não singular e verifica

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

6. Sejam A e B matrizes reais, com $Det A \neq 0$. Mostre que se a matriz B for singular então

$$\frac{1}{cond(A)} \le \frac{\|A - B\|}{\|A\|}.$$

(sugestão: Existe um vector x, de norma 1, tal que $B\,x = 0$. Recorde também que $\|Ax\| \ge \|x\|/\|A^{-1}\|$.)

7. Sabe-se que uma matriz de diagonal estritamente dominante por linhas (ou colunas) é invertível. Demonstre a seguinte majoração para a norma da inversa

$$\|A^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{\displaystyle\min_{i=1,\cdots,n} \left(|a_{ii}| - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right)}.$$

8. Considere o sistema não linear

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - \frac{y \cos x}{4} & = & 0 \\ 1 - 2y + |x - 1| & = & 0 \end{array} \right.$$

(a) Mostre que existe uma única solução deste sistema no conjunto $[0,1] \times [1,2]$.

(b) Utilizando o método do ponto fixo, determine uma aproximação $x^{(n)}$ da solução que verifique $\|z - x^{(n)}\|_\infty \leq 0.05$

9. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x - \frac{y\cos x}{4} & = & 0 \\ 1 - 2y + |x-1| & = & 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que existe uma única solução deste sistema no conjunto $[0,1] \times [1,2]$.

(b) Utilizando o método do ponto fixo, determine uma aproximação $x^{(n)}$ da solução que verifique $\|z - x^{(n)}\|_\infty \leq 0.0005$

10. Considere as linhas de ^{2} definidas pelas equações

$$x + 3\log_{10} x - y^2 = 0$$

$$2x^2 - xy - 5x = -1$$

Suponha que $P_0 = (3.4\,,\,2.2)$ é uma aproximação do ponto P onde as duas linhas se intersetam. utilize o método de newton para determinar uma aproximação $x^{(n+1)}$ (de P) que verifique

$$\|x^{n+1} - x^{(n)}\|_\infty \leq 0.005$$

11. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1 + \cos(x_1x_2x_3) & = & 1 \\ (1-x_1)^{1/4} + 0.05x_3^2 - 0.15x_3 & = & 1 \\ -x_1^2 - 0.1x_2^2 + 0.01x_2 + x_3 & = & 1 \end{cases}$$

(a) Escreva o sistema de equações lineares que lhe permite calcular a primeira iterada $x^{(1)}$ por aplicação do método de Newton generalizado.

(b) Poderá escolher $x^{(0)} = (000)$? Calcule $x^{(1)}$ a partir do vector inicial $(0\pi 3)$.

(c) Reescreva o sistema dado na forma $x = F(x)$ e defina o correspondente método iterativo $x_{n+1} = F(x_n)$. Usando como ponto inicial o $x^{(1)}$ obtido na alínea anterior, efetua duas iteração deste método.

12. Pretende-se resolver pelo método de Newton generalizado o seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3+1) & = & 10 \\ 3(x_2+1) + x_3^2 & = & 11 \\ 3x_1 + x_3^2 & = & 9 \end{cases}$$

tomando como aproximação inicial $x^{(0)} = (3, 2, 1)$. Mostre que o sistema linear $Av = b$ a ser resolvido para se obter $x^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

obtenha ainda o vector b.

13. Considere o seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x^3 + 5y - 2z & = & 0 \\ e^y - z^2 & = & 1 \\ -x^2 + y + z & = & \mu \end{cases}$$

onde μ é um número real conhecido, próximo de zero. Para aproximar a solução deste sistema, pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = (c, 0, 0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $x^{(1)}$, somos levados a resolver o sistema linear com a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

(b) Para que valores de c o sistema linear considerado tem solução única?

(c) No caso de $c = 1$, resolva o sistema pelo método de Doolitle e calcule $x^{(1)}$ (primeira iterada do método de Newton).

14. Considere as linhas de $\mathbb{R}^2$ definidas pelas equações

$$x + 3\log_{10} x - y^2 = 0$$

$$2x^2 - xy - 5x = -1$$

Suponha que $P_0 = (3.4\,,\, 2.2)$ é uma aproximação do ponto P onde as duas linhas se intersetam. utilize o método de newton para determinar uma aproximação $x^{(n+1)}$ (de P) que verifique

$$\|x^{n+1} - x^{(n)}\|_\infty \leq 0.005$$

15. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1 + \cos(x_1 x_2 x_3) &= 1 \\ (1-x_1)^{1/4} + 0.05x_3^2 - 0.15x_3 &= 1 \\ -x_1^2 - 0.1x_2^2 + 0.01x_2 + x_3 &= 1 \end{cases}$$

(a) Escreva o sistema de equações lineares que lhe permite calcular a primeira iterada $x^{(1)}$ por aplicação do método de Newton generalizado.

(b) Poderá escolher $x^{(0)} = (000)$? Calcule $x^{(1)}$ a partir do vector inicial $(0\pi 3)$.

(c) Reescreva o sistema dado na forma $x = F(x)$ e defina o correspondente método iterativo $x_{n+1} = F(x_n)$. Usando como ponto inicial o $x^{(1)}$ obtido na alínea anterior, efetua duas iteração deste método.

16. Para combater um vírus que infectou um grupo de indivíduos vai ser administrado um composto químico sintetizado com base em quatro substâncias elementares S_1, S_2, S_3 e S_4. Sabe-se que se forem administrados α miligramas de composto a cada indivíduo, a concentração em $(mg/litro)$ de cada uma das substâncias elementares na circulação sanguínea é dada implicitamente (para $\alpha \in [0,5]$) pelo sistema de equações

$$\begin{cases} 16x_1 - \cos\left(\alpha\left(x_2 - 2x_1\right)\right) = 0 \\ 16x_2 + 0.75\sin\left(\alpha\left(-x_3 - 3x_1\right)\right) = 0 \\ 16x_3 - \cos\left(\alpha\left(x_4 - 2x_3\right)\right) = 0 \\ 16x_4 - 0.75\sin\left(2\alpha x_3\right) = 0 \end{cases}$$

a) Utilizando o teorema do ponto fixo num conjunto adequado, mostre que o sistema tem uma e uma só solução $z \in \mathbb{R}^4$. Obtenha essa solução, para diversos valores de α, com um erro inferior a 0.5×10^{-6}, medido na norma $\|\cdot\|_\infty$.

b) Trace gráficos aproximados da concentração de cada uma das substâncias elementares x_1, x_2, x_3 e x_4 para α pertencente ao intervalo $[0,5]$.

c) Sabe-se que a substância S_2 é bastante nociva se a sua concentração na circulação sanguínea fôr superior a 0.05 $mg/litro$. Pretende-se administrar a máxima quantidade α de forma que a concentração na corrente sanguínea da substância S_2, i.e. x_2, não exceda 0.03 $mg/litro$, o que corresponde a considerar uma margem de segurança. Proponha uma valor para a concentração α .

17. Considere o operador

$$A(f(x)) = 1 - \int_0^x f(t)\, dt$$

no espaço de Banach $C[0, 1/R]$ munido da norma $\|f\|_\infty = \max |f(x)|$, com $R \geq 2$. Mostre que a equação integral $A(f(x)) = f(x)$ tem uma e uma só solução no conjunto $X = \{g \in C[0, 1/R] : \|g\|_\infty\}$.

18. Considere a equação de Fredholm

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy + \phi(x)$$

em que $K \in C([a, b] \times [a, b])$ e $\phi \in C[a, b]$.

(a) Mostre que se

$$|\lambda|(b - a) \max_{x,y \in [a,b]} |K(x, y)| < 1$$

então existe uma e um só solução f contínua em $[a, b]$ e que o método do ponto fixo define uma sucessão uniformemente convergente para f.

(b) Usando a alínea anterior, indique um intervalo para λ tal que

$$\lambda \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2) f(y)\, dy + x = f(x)$$

tenha solução única em $C[-1, 1]$.

(c) Considere $\lambda = 1/5$ em (b). Usando como iterada inicial $f_0(x) = 0$, calcule as duas primeiras iteradas do método do ponto fixo e conclua acerca da solução. Considerando agora $f_0(x) = 1$, determine um majorante para o erro de $f_1 0$, na norma infinito, calculando apenas a primeira iterada.

19. Seja $A \in \mathbb{L}^n$ uma matriz simétrica e suponha que todos os menores principais são não singulares. Neste caso A admite uma única fatorizarão $A = L\, D\, L^T$, onde L é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária e D é uma matriz diagonal.

(a) Mostre que a fatorização LDL^T de A pode ser obtida pelas fórmulas:

$$\begin{cases} d_{ii} = a_{ii} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\, d_{kk}, & i = 1, \cdots, n \\[2em] l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, l_{jk}\, d_{kk}}{d_{jj}}, & \begin{array}{l} j = 1, \cdots, n \\ i = j+1, \cdots, n \end{array} \end{cases}$$

(b) Mostre que A é definida positiva se e só se $d_{ii} > 0, \quad i = 1, \cdots, n$.

(c) Calcule a fatorização LDL^T da matriz de Hilbert (de ordem 3)

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(d) Obtenha também a fatorização de Cholesky de H_3.

20. Considere os dois sistemas lineares (equivalentes)

$$(1)\left\{\begin{array}{rcc} 0.00005x + y & = & 0.5 \\ x + y & = & 1 \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{rcc} x + 20000y & = & 10000 \\ x + \qquad y & = & 1 \end{array}\right.$$

Supondo que os cálculos são efetuados num sistema de ponto flutuante (base 10) com 4 dígitos na mantissa, analise as vantagens da pesquisa de pivot em cada um dos sistemas. Qual o tipo de pesquisa mais adequado em cada caso?

21. Seja A a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

onde a é um parâmetro real. Suponha que, ao resolver o sistema $A\,x = b$, com certo valor de a, se obteve a solução $\overline{x} = (1, 1, 1)$. Supondo que o valor de a está afetado de um certo erro, de valor absoluto não superior a ε, determine um majorante para o erro absoluto $\|\overline{x} - x\|_\infty$.

22. Seja A uma matriz quadrada, de dimensão n, definida da forma seguinte

$$a_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & , |i-j| > 0 \\ 1 & , |i-j| = 0 \\ \text{-1} & , |i-j| > 0 \end{array}\right.$$

(a) Calcule A^{-1}.

(b) Determine os números de condição $cond_1(A)$ e $cond_\infty(A)$.

(c) Sejam b_1 e b_2 dois vectores de $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty} \leq 10^{-5}.$$

Sejam x_1 e x_2, respetivamente, as soluções dos sistemas $A\,x = b_1$ e $A\,x = b_2$. Determine um majorante de

$$\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$$

no caso de $n = 20$. Comente.

23. Designemos por x_1 uma aproximação da solução do sistema linear $A\,x = b$ e por Δx_1 a correção a adicionar a x_1 de forma a obter a solução exacta do sistema dado.

(a) Mostre que Δx_1 é solução de um sistema linear com a mesma matriz de coeficientes A.

(b) Construa um método iterativo que lhe permita calcular $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots$ (se Δx_1 pudesse ser calculado de forma exacta, a solução do sistema seria $x_1 + \Delta x_1$, como Δx_1 também só pode ser calculado de forma aproximada, $x_2 = x_1 + \Delta x_1$ apenas pode ser tomado como nova aproximação de x). Este tipo de métodos designam-se habitualmente por **correção residual** ou **refinamento iterativo**.

(c) Dado o sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Efetue a fatorização LU da matriz A. Tomando $x_1 = (-0.052, 0.2, 0.004, 0.184)$ e usando a factorização mencionada, efetue uma iteração pelo método de refinamento iterativo. verifique que x_2 é a solução do sistema dado.

24. 2. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 12 \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

(a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

(b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efetue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na 4 iterada. Considere $x^{(0)} = (4, 4, 4)^T$.

(c) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $x^{(k)}$.

25. Considere um sistema de duas equações lineares na forma geral:

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

(a) Mostre que os método de Jacobi converge, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)}$, se e só se $|m| < 1$, onde $m = \frac{a_{12}\, a_{21}}{a_{11}\, a_{22}}$. (Nota: como a matriz é não singular, existe sempre uma permutação das linhas que faz com que os elementos da diagonal sejam não nulos).

(b) Mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante por linhas, se verifica

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty,$$

onde x é a solução do sistema, $x^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = \max(|\frac{a_{12}}{a_{11}}|, |\frac{a_{21}}{a_{22}}|)$.

(c) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Efetue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (2,1)^T$. Com base na alínea anterior, determine um majorante do erro para o resultado obtido.

(d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $\|x^{(k)} - x\|_\infty < 0.001$?

26. Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 106 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{pmatrix}$$

(a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

(b) Escreva o sistema na forma iterativa e determine 4 iteradas do método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (1,1,1)^T$.

27. (ER 2011/2012) Considere o sistema linear, de 4 equações a 4 incógnitas, $Ax = b$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[(a)]Seja $\tilde{x}$ a solução do sistema se considerarmos um segundo membro $\tilde{b} = (1, 1, 1, 1)$. Considerando $\alpha = 10$, calcule o número de condição da matriz A na norma $\|\cdot\|_\infty$ e, sem resolver o sistema, estime a percentagem de erro cometida ao usar $\tilde{b}$ em vez de b. Ainda com $\alpha = 10$, mostre que o método de Jacobi converge e utilize-o para calcular x com erro inferior a 0.5×10^{-6}. Para que valores de α é possível garantir a convergência do método de Jacobi? Será possível encontrar valores de α para os quais o método seja efectivamente divergente ? Quais ?

28. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

(a) Obtenha a fatorização desta matriz pelo método de Crout.

(b) Com base no resultado anterior, calcule $DetA$.

(c) Calcule A^{-1}.

(d) Determine o número de condição de A, na norma 1.

(e) Ao resolver um sistema com a matriz A, sabe-se que o segundo membro é afetado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta b\|_1 \leq \varepsilon$. Determine um majorante para o erro relativo da solução.

29. Considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Verifique que a matriz B pode ser fatorizada pelo método de Cholesky e efetue a fatorização.

(b) Com o mínimo de cálculos, obtenha a fatorização de Crout para B.