Cap. 6.- Relações entre EDE's e EDP's - Parte 3

ISEG

Relação entre a equação do calor e o movimento Browniano

- Seja f uma função contínua e com crescimento polinomial
- A função
$$u(t,x) = E\left[f(B_t + x)\right]$$
satisfaz a equação do calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(0,x) = f(x).$$

Relação entre a equação do calor e o movimento Browniano

- De facto, como B_t tem distribuição $N(0,t)$, temos que

$$E\left[f\left(B_t+x\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}dy,$$

  e a função $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$, para cada y fixo, satisfaz a equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
- A função $x\rightarrow u\left(t,x\right)$ representa a distribuição de temperaturas numa barra de comprimento infinito, supondo que o perfil inicial de temperaturas é dado pela função $f(x)$.

Domínio do operador infinitesimal

- Consideremos uma difusão homgénea no tempo X que satisfaz a EDE

$$\begin{aligned} dX_t &= b\left(X_t\right)dt+\sigma\left(X_t\right)dB_t, \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

- O operador infinitesimal associado não depende do tempo e é dado por

$$Af\left(x\right):=\sum_{i=1}^{n} b_i\left(x\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sigma\sigma^T\right)_{i,j}\left(x\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}, \tag{1}$$

- Aplicando a fórmula de Itô a $f\left(X_s\right)$, obtemos (ver aula anterior)

$$df\left(X_s\right)=Af\left(X_s\right)ds+\left[\nabla_x f\left(X_s\right)\right]\sigma\left(X_s\right)dB_s.$$

- e aplicando o valor esperado:

$$E\left[f\left(X_t^x\right)\right]=f\left(x\right)+\int_0^t E\left[Af\left(X_s\right)\right]ds. \tag{2}$$

Domínio do operador infinitesimal

- Considere-se a função

$$u(t,x) = E\left[f\left(X_t^x\right)\right].$$

- Por (2), a função u é diferenciável em t e satisfaz a equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = E\left[Af\left(X_t^x\right)\right].$$

- A expressão $E\left[Af\left(X_t^x\right)\right]$ pode representar-se como função de u. Para tal, vamos introduzir o domínio do operador infinitesimal.

Definição

O domínio D_A do operador infinitesimal A é o conjunto de funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que o limite seguinte existe para todo o $x \in \mathbb{R}^n$:

$$Af(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{E\left[f\left(X_t^x\right)\right] - f(x)}{t}. \tag{3}$$

- Por (2), temos que $C_0^2(\mathbb{R}^n) \subset D_A$ e se $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, o limite (3) é igual a Af dado por (1).
- A função $u(t,x)$ satisfaz uma EDP - a equação "Backward"de Kolmogorov:

Teorema

Seja $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.
a) Seja $u(t,x) = E\left[f\left(X_t^x\right)\right]$. Então $u(t,\cdot) \in D_A$ e satisfaz a equação (EDP "backward"de Kolmogorov)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \tag{4}$$
$$u(0,x) = f(x).$$

b) Se $w \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ é uma função limitada que satisfaz a EDP (4), então

$$w(t,x) = E\left[f\left(X_t^x\right)\right].$$

Demonstração.

a) Basta calcular o limite

$$Au = \lim_{r \searrow 0} \frac{E\left[u\left(t, X_r^x\right)\right] - u\left(t, x\right)}{r}$$

Pela propriedade de Markov, temos

$$\begin{aligned} E\left[u\left(t, X_r^x\right)\right] &= E\left[E\left[f\left(X_t^y\right)\right]|_{y=X_r^x}\right] \\ &= E\left[f\left(X_{t+r}^x\right)\right] = u\left(t+r, x\right). \end{aligned}$$

Então, como $t \to u(t, x)$ é diferenciável, temos

$$\begin{aligned} \lim_{r \searrow 0} \frac{E\left[u\left(t, X_r^x\right)\right] - u\left(t, x\right)}{r} &= \lim_{r \searrow 0} \frac{u\left(t+r, x\right) - u\left(t, x\right)}{r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

□

Demonstração.

b) Considere-se o processo de dimensão $n+1$:

$$Y_t = \left(s - t, X_t^x\right).$$

A fórmula de Itô aplicada a $w\left(Y_t\right)$, resulta em

$$\begin{aligned} w\left(Y_t\right) = w\left(s, x\right) &+ \int_0^t \left(Aw - \frac{\partial w}{\partial r}\right)\left(s-r, X_r^x\right) dr \\ &+ \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i}\left(s-r, X_r^x\right) \sigma_{i,j}\left(X_r^x\right) dB_r^j \end{aligned}$$

Como $Aw = \frac{\partial w}{\partial t}$, obtemos

$$w\left(Y_t\right) = w\left(s, x\right) + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i}\left(s-r, X_r^x\right) \sigma_{i,j}\left(X_r^x\right) dB_r^j$$

□

Demonstração.

b) (Continuação) Pretendemos agora aplicar o valor esperado, mas como não foi imposta nenhuma condição sobre o crescimento das derivadas parciais de w, não sabemos se a esperança dos integrais estocásticos é zero.

Por isso, introduzimos um tempo de paragem τ_R para $R > 0$, dado por

$$\tau_R := \inf \{ t > 0 : |X_t^x| \geq R \} .$$

Se $r \leq \tau_R$, o processo $\frac{\partial w}{\partial x_i} (s - r, X_r^x) \sigma_{i,j} (X_r^x)$ é limitado e os integrais estocásticos estão bem definidos e a sua esperança é zero. Logo,

$$E [w (Y_{t \wedge \tau_R})] = w (s, x)$$

e fazendo $R \to \infty$, temos para todo $t \geq 0$:

$$E [w (Y_t)] = w (s, x) .$$

□

Demonstração.

(continuação) □

Finalmente, com $s = t$ e usando $w (0, x) = f (x)$, temos

$$w (s, x) = E [w (Y_s)] = E [w (0, X_s^x)] = E [f (X_s^x)] .$$

Fórmula de Feynman-Kac

De forma análoga, pode provar-se o seguinte teorema (ver Oksendal):

Teorema

Seja $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ e $q \in C(\mathbb{R}^n)$, com q limitada inferiormente.
a) Seja

$$v(t,x) = E\left[\exp\left(-\int_0^t q(X_s^x)\,ds\right) f(X_t^x)\right]$$

. Então $v(t,\cdot) \in D_A$ para cada t e satisfaz a equação EDP

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv, \qquad (5)$$
$$v(0,x) = f(x).$$

b) Se $w \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ é uma função limitada em cada $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ e que satisfaz a EDP (5), então

$$w(t,x) = v(t,x).$$

Tempos de paragem

- Um tempo de paragem ("stopping time") relativamente a uma filtração $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ é uma variável aleatória
$$\tau : \Omega \to [0,+\infty]$$
tal que, para todo o $t \geq 0$, temos que $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.
- Podemos decidir se "paramos ou não"antes de um instante t a partir da informação contida em $\mathcal{F}_t$.
- Exemplo: o tempo de chegada de um processo contínuo e adaptado $X = \{X_t, t \geq 0\}$ a um nível a, i.e.
$$\tau_a := \inf\{t > 0 : X_t = a\}$$
é um tempo de paragem.
De facto, temos que
$$\{\tau \leq t\} = \left\{\sup_{0\leq s\leq t} X_s \geq a\right\} = \left\{\sup_{0\leq s\leq t, s\in\mathbb{Q}} X_s \geq a\right\} \in \mathcal{F}_t$$

Tempos de paragem

- Podemos associar a um tempo de paragem τ a σ-álgebra $\mathcal{F}_\tau$ formada pelos conjuntos G tais que

$$G \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

- Os tempos de paragem satisfazem as propriedades (ver Nualart):

1. Se $\{M_t, t \in [0, T]\}$ é uma martingala contínua e τ é um tempo de paragem limitado por T, então

$$E\left[M_T | \mathcal{F}_\tau\right] = M_\tau.$$

2. Se $u \in L^2_{a,T}$ e τ é um tempo de paragem limitado por T, o processo $u\mathbf{1}_{[0,\tau]}$ também pertence a $L^2_{a,T}$ e temos que

$$\int_0^T u\mathbf{1}_{[0,\tau]}(t)\, dB_t = \int_0^\tau u(t)\, dB_t$$