Cap. 8- Modelos dos mercados financeiros - parte 2

ISEG

O modelo de Black-Scholes

- Modelo de Black-Scholes: 2 activos com dinâmica:

$$dB(t) = rB(t)\,dt, \tag{1}$$

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t d\overline{W}_t, \tag{2}$$

onde r, α e σ são constantes.

- $B(t)$ é o preço de um activo sem risco (obrigação ou depósito bancário): é uma função determinista.
- S_t é o processo de preço de um activo com risco (acção ou índice): é um processo estocástico.
- $\overline{W}_t$: Movimento Browniano relativamente à medida de probabilidade original P.

O modelo de Black-Scholes

- r: taxa de juro sem risco ("short rate of interest").
- α: taxa de rendibilidade média ("mean rate of return") do activo com risco.
- σ: Volatilidade do activo com risco.
- A solução de (2) é o movimento Browniano geométrico:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma \overline{W}_t\right).$$

Derivados financeiros

- Consideremos um direito contingente ("contingent claim- exemplo, um derivado financeiro) com payoff da forma:

$$\chi = \Phi\left(S\left(T\right)\right). \tag{3}$$

O seu processo de preço é representado por

$$\Pi\left(t\right), \quad t \in \left[0, T\right].$$

Portfolios

- Portfolio $\left(h^0(t), h^*(t)\right)$
- $h^0(t)$: n^o de obrigações (ou número de unidades do activo sem risco).
- $h^*(t)$ n^o de acções ("n^o of shares of stock") no portfolio no instante t.

Portfolios

- Valor do portfolio no instante t:

$$V(t) = h^0(t) B_t + h^*(t) S_t.$$

- Supõe-se que o portfolio é autofinanciado,.isto é, que:

$$dV_t = h^0(t) dB_t + h^*(t) dS_t.$$

- Um portfolio auto-financiado é um portfolio no qual a variação do seu valor é causada apenas pela variação do preço dos activos.
- Na forma integral:

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + \int_0^t h^*(s) dS_s + \int_0^t h^0(s) dB_s \\ &= V_0 + \int_0^t \left(\alpha h^*(s) S_s + r h^0(s) B_s\right) ds + \sigma \int_0^t h^*(s) S_s d\overline{W}_s. \end{aligned} \tag{4}$$

Modelo de Black-Scholes

- Suponha que o direito contingente ("contingent claim- exemplo: derivado financeiro) com payoff da forma:

$$\chi = \Phi\left(S\left(T\right)\right). \tag{5}$$

é replicável pelo portfolio $h = \left(h^0\left(t\right), h^*\left(t\right)\right)$ (isto é, $V_T^h = \chi = \Phi\left(S\left(T\right)\right)$ a.s.). Então, o único processo de preço compatível com o princípio de ausência de arbitragem é

$$\Pi\left(t\right) = V_t^h, \quad t \in \left[0, T\right]. \tag{6}$$

- Assumimos ainda que

$$\Pi\left(t\right) = V_t^h = F\left(t, S_t\right). \tag{7}$$

onde F é uma função diferenciável de classe $C^{1,2}$.

Modelo de Black-Scholes

- Aplicando a fórmula de Itô a (7), considerando (2), obtemos:

$$dF(t, S_t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\left(t, S_t\right) + \alpha S_t \frac{\partial F}{\partial x}\left(t, S_t\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(t, S_t\right)\right) dt + \left(\sigma S_t \frac{\partial F}{\partial x}\left(t, S_t\right)\right) d\overline{W}_t.$$

Modelo de Black-Scholes

Ou seja:

$$F(t, S_t) = F(0, S_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s, S_s) + AF(s, S_s) \right) ds$$
$$+ \int_0^t \left(\sigma S_s \frac{\partial F}{\partial x}(s, S_s) \right) d\overline{W}_s, \tag{8}$$

onde

$$Af(t, x) = \alpha x \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$$

é o operador infinitesimal associado à difusão S_t com EDE (2).

Modelo de Black-Scholes

- Comparando (4) e (8), temos que

$$\sigma h^*(s) S_s = \sigma S_s \frac{\partial F}{\partial x}(s, S_s),$$
$$\alpha h^*(s) S_s + r h^0(s) B_s = \frac{\partial F}{\partial t}(s, S_s) + AF(s, S_s).$$

- Pelo que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(s, S_s) = h^*(s),$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}(s, S_s) + r S_s \frac{\partial F}{\partial x}(s, S_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, S_s) - rF(s, S_s) = 0.$$

Modelo de Black-Scholes

Temos portanto:

- Um portfolio h com valor $V_t^h = F(t, S_t)$ constituído à custa de activos com risco de preço S_t e de activos sem risco com preço B_t.
- O portfolio h deve replicar em cada instante t o direito contingente (ou derivado) χ. e devemos ter

$$\Pi(t) = V_t^h = F(t, S_t).$$

- Em particular:

$$F(T, S_T) = \Phi(S(T)) = \text{Payoff}.$$

Modelo de Black-Scholes

- O portfolio deve ser continuamente actualizado com aquisição (ou venda) de $h^*(t)$ shares do activo com risco e $h^0(t)$ unidades do activo sem risco, onde

$$h^*(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t),$$
$$h^0(t) = \frac{V_t^h - h^*(t) S_t}{B_t} = \frac{F(t, S_t) - h^*(t) S_t}{B_t}.$$

- O portfolio tem a dinâmica dada pela EDP:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t) - rF(t, S_t) = 0.$$

Modelo de Black-Scholes

Teorema

(Eq. de Black-Scholes): Assuma que o mercado é especificado pelas eqs. (1)-(2) e que queremos avaliar um derivado com payoff da forma (3). Então, a única função de preço que é consistente com o princípio de ausência de arbitragem é a solução F do seguinte problema de valores na fronteira, definido no domínio $[0, T] \times \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rF(t,x) = 0, \qquad (9)$$

$$F(T,x) = \Phi(x).$$

Modelo de Black-Scholes

- A equação de Black-Scholes pode ser resolvida por via analítica ou por via probabílista.

Proposição

(Fórmula de Feynman-Kac): Assuma que F é solução do problema de valores na fronteira

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+\mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)-rF(t,x)=0, \tag{10}$$

$$F(T,x)=\Phi(x).$$

Assuma que $\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)$ *é um processo em* L^2 *(i.e.* $E\int_0^t\left(\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\sigma(s,X_s)\right)^2 ds<\infty$*). Então*

$$F(t,x)=e^{-r(T-t)}E_{t,x}\left[\Phi(X_T)\right],$$

onde X satisfaz

$$dX_s=\mu(s,X_s)\,ds+\sigma(s,X_s)\,dB_s,$$
$$X_t=x.$$

Modelo de Black-Scholes

- Aplicando a fórmula de Feynman-Kac. obtemos:

$$F(t,x)=e^{-r(T-t)}E_{t,x}\left[\Phi(X_T)\right],$$

onde X é um processo estocástico com dinâmica:

$$dX_s=rX_s ds+\sigma X_s d\overline{W}_s,$$
$$X_t=x.$$

Modelo de Black-Scholes

- Atenção: o processo X não é o nosso processo S, pois o "drift"de X é rX e não αX..
- ideia: "passar"do processo X para o processo S usando o teorema de Girsanov.