Cap. 8- Modelos dos mercados financeiros - parte 3

ISEG

O modelo de Black-Scholes

- Modelo de Black-Scholes: 2 activos com dinâmica:

$$dB(t) = rB(t)\,dt, \tag{1}$$
$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t d\overline{W}_t, \tag{2}$$

  onde r, α e σ são constantes.
- $B(t)$ é o preço de um activo sem risco (obrigação ou depósito bancário): é uma função determinista.
- S_t é o processo de preço de um activo com risco (acção ou índice): é um processo estocástico.
- $\overline{W}_t$: Movimento Browniano relativamente à medida de probabilidade original P.

Modelo de Black-Scholes

Teorema

*(Eq. de Black-Scholes): Assuma que o mercado é especificado pelas eqs. (1)-(2) e que queremos avaliar um derivado com payoff da forma (**??**). Então, a única função de preço que é consistente com o princípio de ausência de arbitragem é a solução F do seguinte problema de valores na fronteira, definido no domínio $[0, T] \times \mathbb{R}^+$:*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rF(t,x) = 0, \qquad (3)$$
$$F(T,x) = \Phi(x).$$

Proposição

(Fórmula de Feynman-Kac): Assuma que F é solução do problema de valores na fronteira

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rF(t,x) = 0, \qquad (4)$$
$$F(T,x) = \Phi(x).$$

Assuma que $\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)$ é um processo em L^2 (i.e. $E\int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\sigma(s,X_s)\right)^2 ds < \infty$). Então

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}E_{t,x}\left[\Phi(X_T)\right],$$

onde X satisfaz

$$dX_s = \mu(s,X_s)\,ds + \sigma(s,X_s)\,dB_s,$$
$$X_t = x.$$

Modelo de Black-Scholes

- Aplicando a fórmula de Feynman-Kac. obtemos:

$$F\,(t, x) = e^{-r(T-t)} E_{t,x}\left[\Phi(X_T)\right], \tag{5}$$

onde X é um processo estocástico com dinâmica:

$$\begin{aligned} dX_s &= rX_s ds + \sigma X_s d\overline{W}_s, \\ X_t &= x. \end{aligned} \tag{6}$$

Modelo de Black-Scholes

- Atenção: o processo X não é o nosso processo S, pois o "drift"de X é rX e não αX. Ou seja, S tem como taxa local de rendibilidade α, enquanto X tem como taxa local de rendibilidade a taxa de juro sem risco r.
- ideia: "passar"do processo X para o processo S usando o teorema de Girsanov.
- Denotemos por P a medida de probabilidade original (medida de probabilidade "objectiva"). A dinâmica-P do processo S é a dada em (2)

Modelo de Black-Scholes

- Note-se que (2) é equivalente a

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\alpha - r}{\sigma} dt + d\overline{W}_t \right)$$
$$= rS_t dt + \sigma S_t d \underbrace{\left(\frac{\alpha - r}{\sigma} t + \overline{W}_t \right)}_{W_t}.$$

- Pelo Teorema de Girsanov, existe uma medida de probabilidade Q tal que no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, o processo

$$W_t := \frac{\alpha - r}{\sigma} t + \overline{W}_t$$

é um movimento Browniano e S tem a dinâmica (sob Q):

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{7}$$

Modelo de Black-Scholes

- Notação: E denota o valor esperado sob a medida original P e E^Q denota o valor esperado sob a nova medida Q (medida resultante da aplicação do teorema de Girsanov)
- $\overline{W}_t$ denota o movimento Browniano original (sob a medida P) e W_t denota o movimento Browniano sob a medida Q.

Modelo de Black-Scholes

- Voltando a (5) e (6), tendo em conta que sob a medida Q as equações (6) e (7) são as mesmas, podemos representar a solução da Equação de Black-Scholes por

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} E_{t,s}^{Q}\left[\Phi(S_T)\right],$$

onde a dinâmica de S sob a medida Q é

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Modelo de Black-Scholes

Teorema

O preço (na ausência de arbitragem) do direito contingente $\Phi(S_T)$ é dado por $F(t,S_t)$ onde F é dada pela fórmula

$$F(t,S_t) = e^{-r(T-t)} E_{t,s}^{Q}\left[\Phi(S_T)\right], \tag{8}$$

onde a dinâmica de S sob a medida Q é

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

- Nota: no modelo, o coeficiente de difusão σ pode depender de t e S - função $\sigma(t,S_t)$ - os cálculos seriam análogos nessa situação aos que acabamos de efectuar.

Modelo de Black-Scholes

- A medida Q designa-se por medida de martingala ("martingale measure"). A razão para esta terminologia tem a ver com o facto de que o processo descontado

$$\widetilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}$$

é uma Q-martingala (martingala sob a medida Q).

- De facto,

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_t &= \frac{S_t}{B_t} = e^{-rt} S_t = e^{-rt} S_0 \exp\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma \overline{W}_t\right) \\ &= S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right)\end{aligned}$$

é uma martingala (como já vimos em aula anterior).

Modelo de Black-Scholes

- Calculando explicitamente o preço do derivado, temos

$$\begin{aligned}& e^{r(T-t)} F(t,s) = E^Q_{t,s}\left[\Phi(S_T)\right] \\ &= E^Q_{t,s}\left[\Phi\left(s \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\left(W_T - W_t\right)\right)\right)\right] \\ &= E^Q\left[\Phi\left(se^Z\right)\right],\end{aligned}$$

onde $Z = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\left(W_T - W_t\right) \sim N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2 (T-t)\right)$.

- Logo

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(se^y\right) f(y)\, dy, \tag{9}$$

onde f é a densidade da v.a. gaussiana Z.

Modelo de Black-Scholes

- A fórmula integral (9) em geral, para uma função Φ dada, deve ser calculada usando métodos numéricos.
- Existem contudo alguns casos particulares em que (9) pode ser obtida de forma analítica. Por exemplo, para uma opção Europeia de compra (do tipo "call") com payoff

$$\Phi(x) = (x-K)^{+} = \max(x-K, 0),$$

temos

$$\begin{aligned} F(t,s) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(se^{y}-K, 0)\, f(y)\, dy \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{\ln(K/s)}^{+\infty} (se^{y}-K)\, f(y)\, dy \\ &= e^{-r(T-t)} \left(s \int_{\ln(K/s)}^{+\infty} e^{y} f(y)\, dy - K \int_{\ln(K/s)}^{+\infty} f(y)\, dy \right) \end{aligned} \tag{10}$$

Modelo de Black-Scholes

- Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} &\int_{\ln(K/s)}^{+\infty} e^{y} f(y)\, dy = \\ &= \int_{\ln(K/s)}^{+\infty} \frac{\exp\left(y - \frac{\left(y - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} dy \\ &= \int_{\ln(K/s)}^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{2\sigma^2(T-t)y - \left(y - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} dy \\ &= e^{r(T-t)} \int_{\ln(K/s)}^{+\infty} \frac{\exp\left(- \frac{\left(y - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} dy \end{aligned}$$

Mas $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left(-\frac{\left(y-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)$ é a função densidade de uma v.a. Z^* com distribuição $N\left(\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$.

Modelo de Black-Scholes

- Cálculos auxiliares:

$$\int_{\ln(K/s)}^{+\infty} e^y f(y)\,dy = e^{r(T-t)} Q\left(Z^* \geq \ln(K/s)\right)$$
$$= e^{r(T-t)} Q\left(\overline{Z} \geq \frac{\ln(K/s) - \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$
$$= e^{r(T-t)} Q\left(\overline{Z} \leq \frac{\ln(s/K) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$
$$= e^{r(T-t)} N\left[d_1(t,s)\right],$$

onde $N[x]$ é a função de distribuição cumulativa da distribuição $N(0,1)$ e

$$d_1(t,s) = \frac{\ln(s/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Modelo de Black-Scholes

- Cálculos auxiliares:

$$\int_{\ln(K/s)}^{+\infty} f(y)\,dy = Q(Z \geq \ln(K/s))$$

$$= Q\left(\overline{Z} \geq \frac{\ln(K/s) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$= Q\left(\overline{Z} \leq \frac{\ln(s/K) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) = N[d_2(t,s)],$$

onde $N[x]$ é a função de distribuição cumulativa da distribuição $N(0,1)$ e

$$d_2(t,s) = \frac{\ln(s/K) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Modelo de Black-Scholes

- Substituindo os cálculos auxiliares em (10), obtemos

$$\begin{aligned} F(t,s) &= e^{-r(T-t)}\left(se^{r(T-t)}N\left[d_1(t,s)\right] - KN\left[d_2(t,s)\right]\right) \\ &= sN\left[d_1(t,s)\right] - e^{-r(T-t)}KN\left[d_2(t,s)\right] \end{aligned}$$

- Fórmula de Black-Scholes:

$$F(t,s) = sN\left[d_1(t,s)\right] - e^{-r(T-t)}KN\left[d_2(t,s)\right].$$

- TPC: Exercício - Deduza a fórmula de Black-Scholes a partir de (8) para uma opção de venda europeia (ou opção "put"com payoff $\Phi(S_T) = \max(K - S_T, 0)$).