Capítulo 4

Interpolação e Aproximação

1. Seja f uma função real de classe C^{n+1}, definida num intervalo $[a,b]$. Seja ainda $p_n \in \mathcal{P}_n$ o polinómio interpolador de f em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Para cada $x \in [a,b]$ o erro de interpolação é dado por:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W(x)$$

em que $\xi = \xi(x)$ pertence ao menor intervalo que contém todos os pontos de interpolação e $W(x) = (x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

(a) Mostre que a função $f^{(n+1)}(\xi)$ pode ser prolongada como uma função contínua de x, para $x \in [a,b]$.

(b) Mostre que existe uma constante M_{n+1} tal que

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |W(x)|$$

2. Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathcal{R}$ uma função de classe C^4.

(a) Mostre que existe um e um só polinómio p, de grau ≤ 2 tal que

$$p(0) = f(0); \quad p(1) = f(1); \quad \int_0^1 p(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

(b) Mostre que existe $\xi \in]0,1[$ tal que $p(\xi) = f(\xi)$.

(c) Utilize o resultado da alínea anterior para mostrar que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{6}.$$

3. Considere uma tabela de valores da função $f(x) = \exp(x)$, em pontos igualmente espaçados. Diga qual deve ser o valor do espaçamento h, de modo a garantir que o erro de interpolação seja em módulo inferior a 10^{-6}, para todo $x \in [0, 1]$.

4. Sejam $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $n+1$ pontos distintos de $[a, b]$. Mostre que o polinómio interpolador de grau $\leq n$ de uma função f, relativamente a esses pontos, pode ser representado na forma

$$p_n(x) = W(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)W'(x_k)}$$

onde $W(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. verifique também que o limite da expressão da direita quando $x \longrightarrow x_m$ é $f(x_m)$.

5. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	5	4	8

(a) Recorrendo à fórmula interpoladora de Lagrange, calcule um valor aproximado de $f(1/2)$.

(b) Repita a alínea anterior usando a fórmula interpoladora de Newton com diferenças divididas.

(c) Suponha que $f(x) = 4\exp(-x) + c_1\, x + c_2\, x^2$. Determine um majorante para o erro $|f(1/2) - p(1/2)|$.

6. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-2	0	2
$f(x_i)$	3	6	15

(a) Usando todos os pontos da tabela, determine uma aproximação de $f(3)$.

(b) supondo que f é um polinómio de grau 3, determine os valores de $x \in [-2, 2]$ para os quais o erro absoluto de interpolação quadrática é máximo.

(c) admitindo que o coeficiente de x^3 é 5, determine o valor exacto de $f(3)$, utilizando o resultado obtido em (a).

7. Na tabela seguinte são apresentados valores de uma função de classe C^2 definida no intervalo $]0, +\infty[$

x_i	0.8	1.0	1.6
$f(x_i)$	1.890	2.000	3.185

(a) Obtenha o polinónio p_2 que interpola f nos pontos da tabela, usando a fórmuloa de Lagrange.

(b) O mesmo que na alínea anterior, mas usando a fórmula de Newton.

(c) Calcule $p_2(1.3)$ e, sabendo que $f(x) - 1/x$ é um polinómio de grau não superior a 2,obtenha um majorante para o erro cometido.

8. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_i	-1	1	4
$f(x_i)$	2	-2	-8

Supondo que f é um polinómio e que

$$f[-1,1,2] = 4, \qquad f[-1,1,2,4,x] = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1,2,4\},$$

determine a expressão de $f(x)$.

9. Seja f uma função real definida em $[a,b]$ e suponhamos conhecidos os valores $f(x_i)$ em $n+1$ pontos distintos $x_0, \cdots, x_n \in [a,b]$. Prove que

$$f[x_0, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

10. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	1	1	2

(a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, construa o polinómio interpolador de f de grau ≤ 3.

(b) Sabendo que $f'''(x) = 4x - 1$, utilize a alínea anterior para determinar a expressão exacta de f.

11. Considere a seguinte tabela de valores de uma funçaio f:

x_i	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
$f(x_i)$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Obtenha $f(0.47)$ usando um polinómio de grau 2.

(b) Admitindo que $f \in C^3[0,1]$, determine um majorante para o erro cometido na alínea anterior.

12. Seja f uma função definida no intervalo $[0,1]$ tal que a sua derivada de ordem m satisfaz

$$|f^{(m)}(x)| \leq m!, \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

seja ainda p_n o polinómio interpolador de f nos pontos $1, q, q^2, \cdots, q^n$, com q números real tal que $0 < q < 1$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} p_n(0) = f(0).$$

13. Sejam $x_1, \cdots, x_M$ valores reais distintos e $f_1, \cdots f_M$ os valores correspondentes de uma função f nesses pontos. Prove que existe uma única função F_M da forma

$$F_M(x) = \sum_{j=1}^{M} c_j \exp(jx)$$

para a qual se tem $F_M(x_i) = f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, M$.

14. Sejam $l_0(x)$, $l_1(x), \cdots, l_n(x)$ os polinómios de Lagrange de grau n, associados aos nós $x_0, \cdots, x_n$

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Considere a função g definida por

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) - 1$$

Prove que

(a) g é um polinómio de grau $\leq n$.

(b) $g(x_i) = 0, \quad i = 0, \cdots, n.$

(c) $g(x) = 0$, para todo o x.

15. O polinómio de Chebychev de grau n é definido, para $x \in [-1, 1]$ por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Prove que

(a) Os polinómios de Chebychev satisfazem a relação de recorrência

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2\,x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

(b) Se $n \geq 1$ o polinómio $T_n(x)$ tem n zeros simples no intervalo $[-1, 1]$, admitindo a factorização

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\,\pi \right) \right).$$

(c) No intervalo $[-1, 1]$ os extremos de T_n são 1 e -1, atingidos alternadamente nos pontos $t_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, \cdots, n$.

(d) Definam-se os polinómios

$$\overline{T}_0(x) = 1, \quad \overline{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

e seja $\overline{\Pi}_n$ o conjunto dos polinómios mónicos de ordem n (o coeficiente do termo de maior grau é 1). demonstre que

$$\max_{x \in [-1,1]} \left|\overline{T}_n(x)\right| \leq \max_{x \in [-1,1]} |p_n(x)|\,, \quad \forall_{p_n} \in \overline{\Pi}_n.$$

16. Suponhamos conhecidos os valores de f e f' nos pontos $x_0, \cdots, x_n \in [a, b]$. Seja H_{2n+1} o polinómio de Hermite de grau $\leq 2n+1$ interpolador de f e de f' nesses pontos. Prove que se $f \in C^{2n+2}$ então, para cada $x \in [a, b]$,

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \left[\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right]^2$$

em que $\xi = \xi(x)$ pertence ao menor intervalo que contém todos os pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n, x$.

17. Seja H_3 o polinómio de Hermite de grau ≤ 3 interpolador de f ef' nos pontos $x_0 < x_1 \in [a,b]$. Prove que se $f \in C[x_0, x_1]$ e $\max\limits_{t\in[x_0,x_1]} |f^{(4)}(t)| \leq M$, então é válida a seguinte fórmula de majoração do erro:

$$|f(x) - H_3(x)| \leq M\frac{(x_1 - x_0)^4}{384}, \quad \forall_x \in [x_0, x_1].$$

18. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f e sua derivada

x_i	0	1	2
f_i	1	2	1
f_i'	1	0	-1

(a) Determine o polinómio interpolador correspondente à tabela dada.

(b) Supondo que f é de classe C^6, determine um majorante para o erro $f(x) - H_5(x)$

19. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f e sua derivada

x_i	0	1	2
f_i	1	2	4
f_i'	1	-	1
f_i''	0	-	-

Calcule o polinómio que interpola f e as derivadas indicadas na tabela.

20. Considere a seguinte tabela com valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

(a) Determine a melhor aproximação de f, no sentido dos mínimos quadrados, usando polinómios p de grau ≤ 1.

(b) Idem para polinómios de grau ≤ 2.

(c) Idem para polinómios de grau ≤ 3.

(d) Determine em todos os casos $d(f, p)$.

21. Considere os pontos

$$(-5, 1), \quad (-3, 0), \quad (-1, -1), \quad (1, 2).$$

(a) Determine a função da forma

$$g(x) = \frac{a}{x+1} + bx^2$$

que melhor apromixa esses pontos no sentido dos mínimos quadrados.

(b) Determine a função da mesma forma que melhor aproxima o polinómio terpolador que passa nos mesmos pontos.

22. Determine qual a função da forma $g(x) = a + cx^2$ que melhopr aproxima $f(x) = \sin(\pi x)$ no intervalo $[0, 1]$. Determine o erro no ponto $x = 1$, assim como o maior erro $|f(x) - g(x)|$ cometido nesse intervalo.