Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
2ºSemestre 2012/2013
Época Normal: 11 de Junho de 2013
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{x^2-1} \leq 0\right\}$ e $B = \left\{\ln\left(\frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique o supremo, ínfimo, máximo e mínimo, caso existam, do conjunto B.

(c) Calcule o interior e a fronteira de $A \cap B$ e de $A \cup B$.

(4,0) 2. (a) Calcule o valor de k de forma a que $\lim \sqrt[n]{n!\left(\dfrac{k}{n}\right)^n} = 2$.

(b) Determine a função real de variável real f que verifica $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ e $f'(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

(4,5) 3. Dado $k \in \mathbb{R}$ considere $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \arccos(x) & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ k + x\displaystyle\int_1^{x^2} e^{t^2}\, dt & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Determine um valor para $k \in \mathbb{R}$ de forma a que $f \in C^0([0, +\infty[)$.

(b) Para o valor de k encontrado na alínea anterior calcule, caso existam, $f'(1^+)$ e $f'(1^-)$.

(c) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\exists^1 c \in]0, \sqrt{2}/2[: \quad f(c) = 0$.

ii. $\forall x, y \in [1, +\infty[, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

(2,0) 4. Utilize o teorema de Taylor para calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + \cos(x+\pi) - x}{x^2}.$$

(2,5) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x-1).\cos(x-1)|}{(x-1)\sqrt[5]{(x-1)^{\alpha} + (x-1)^{3\alpha}}} dx$$

(2,5) 6. Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ que verificam as seguintes condições:

$$x(f'(x) - g'(x)) > 0, \quad \forall x \neq 0 \qquad e \qquad f(0) > g(0).$$

Prove que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > g(x)$.

Mostre, com um exemplo, que se retirarmos a hipótese $f(0) > g(0)$ poderiamos ter $f(x) < g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.