Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
2ºSemestre 2012/2013
Época de Recurso: 1 de Julho de 2013
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : |3 - 2x + x^2| < 5\}$ e $B = \{e^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cap \mathbb{Q}$ e de $A \cap B$.

(c) B é um conjunto fechado?

(d) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists x \in B : x \leq b, \quad \forall b \in B;$$

(4,0) 2. (a) Prove, por indução matemática, que 5 é divisor de $2^{4n-2} + 1$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

(b) Calcule a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = 1$ e pelas rectas de equação $x = \frac{1}{2}$ e $x = 3$.

(4,5) 3. Dado $k \in \mathbb{R}$ considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} ke^x + \displaystyle\int_1^x te^t dt & \text{se } x < 0 \\ \arcsin\left(\dfrac{x}{1+x}\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Calcule, justificando, o domínio de f.

(b) Determine, caso exista, um valor para $k \in \mathbb{R}$ de forma a que $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(c) Existe $k \in \mathbb{R}$ para o qual f é diferenciável em $x = 0$?

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\forall x < 0, \quad f(x) - ke^x < 0;$

ii. $\forall x, y > 0, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y);$

(2,0) 4. Sejam $a, b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ e considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = ae^x + be^{-x}.$$

Prove que f tem um extremo local se e só se $ab > 0$.

Supondo que a condição anterior é verificada determine e classifique o extremo de f, em função dos valores de a e b.

(2,5) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^1 \frac{\tan^2(x)}{(e^x - 1)(x^5 - x)^{2\alpha}} dx$$

(2,5) 6. Seja f uma função definida num intervalo aberto I, contínua em I e sejam $0, 1 \in I$. Supondo que

$$f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{3n-1}{n^2} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

calcule o valor de $f(0)$ e prove que o contradomínio de f contém o intervalo $[1, 3]$.