

Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1º Semestre 2012/2013
Época Normal: 16 de Janeiro de 2013
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|5-3x|} \geq 1 \right\}$ e $B = \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

- (a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.
- (b) Indique o conjunto dos majorantes de B e o seu mínimo, caso exista.
- (c) Escreva a fronteira de B e indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\forall \epsilon > 0 \quad B \cap]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[\neq \emptyset \text{ e } (\mathbb{R} \setminus B) \cap]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[\neq \emptyset$$

- (3,5) 2. (a) Calcule a área da figura plana limitada, por $x = \frac{\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $y = 0$ e o gráfico da função $f(x) = \tan(x)$.
(b) Determine a função real de variável real f que verifica $f(0) = 1$ e $f'(x) = x^2 \arctan(x)$.

(4,5) 3. Dado $a \in \mathbb{R}$ considere-se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ a & \text{se } x = 0 \\ x^{-2} \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- (a) Determine, caso exista, um valor para $a \in \mathbb{R}$ de forma a que $f \in C^0(\mathbb{R})$.
- (b) Estude, em função do valor de a , a existência de $f'(0)$.
- (c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists c \in]\pi, 2\pi[: f'(c) = 0$$

- (3,5) 4. (a) Escreva o polinómio de MacLaurin de ordem 3 da função $g(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$ e utilize o resultado obtido e teorema de Taylor para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2) dt - x^3}{x^3}$.
(b) Utilize o teorema de Lagrange para provar que

$$\int_0^x \sin(t^2) dt \leq x, \quad \forall x > 0$$

(2,0) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α , a convergência do seguinte integral:

$$\int_1^3 \frac{(e^{x-1} - 1) \sin^2(x)}{\sqrt{9 - x^2}(x^4 - x^2)^\alpha} dx$$

(2,5) 6. Prove que existe uma única função diferenciável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) \neq 0, \forall x \neq 0$, que verifica a seguinte igualdade:

$$\int_0^x f^3(t) dt = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2.$$

Determine-a.