Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2009/2010
Época Normal: 7 de Janeiro de 2010
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(3,5) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n n^2 + 4}{2n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x-1| < \dfrac{1}{2} \right\}$.

(a) Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de A e, caso existam, o máximo e o mínimo de A.

(b) Calcule o conjunto dos pontos de acumulação de A, o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cap B$ e o interior de $A \cup B$.

(4,0) 2. (a) Calcule o valor de k de forma a que $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n!}{(kn)^n}} = 3$.

(b) Calcule a área da figura plana limitada por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}$.

(5,0) 3. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e considere-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1} \displaystyle\int_0^{(x^2-1)} \sin t \, dt & \text{se } x > 1 \\ a & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{e^{(x-1)^2} - 1}{bx - b} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

(a) Indique, justificando, os valores de a e b de forma a que f seja contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Existem valores de a e b para os quais f é diferenciável no ponto $x = 1$?

(c)

(2,5) 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = e^{\sin x}$. Prove, utilizando o teorema de Lagrange, que

$$f(x) \leq 1 + ex, \quad \forall x \geq 0.$$

(2,5) 5. Estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3}{x^\alpha \sqrt{x^4-1}} dx.$$

(2,5) 6. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ e seja g a função definida por $g(x) = f(x) - x^2$. Prove que, se a função g tem 3 zeros, um negativo, um nulo e um positivo então a função f' tem, pelo menos, um zero.