Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2009/2010
Época de Recurso: 26 de Janeiro de 2010
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(3,5) 1. (a) Utilizando o princípio de indução matemática, prove que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $4^{2n} - 1$ é um multiplo de 5.

(b) Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 4| \leq 3\} \cap \mathbb{Q}$ calcule $int(A)$, $fr(A)$, supremo e máximo de A, caso existam.

(4,0) 2. (a) Determine a primitiva da função $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+1}$ que se anula para $x = 2$.

(b) Calcule a área da figura plana limitada por $x = \frac{1}{2}$, $x = e$ e os gráficos das funções $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = -\ln(x)$.

(5,0) 3. Dado $k \in \mathbb{R}$ considere-se a função $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x-1)}{x-1} + k & \text{se } x < 1 \\ \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} \ln^3 t \, dt & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists^1 k \in \mathbb{R} : \; f_k \in C^0(\mathbb{R}).$$

(b) Para $k = -1$ a função é diferenciável em $x = 1$?

(c) Calcule, ou prove que não existe, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(3,0) 4. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função tal que $f(x) = \sin(x^2 - 1) + 2x^2$.

(a) Prove que f tem no intervalo $[0, 1]$ pelo menos um zero.

(b) Prove que, em $\mathbb{R}$, f tem exactamente dois zeros.

(2,5) 5. Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{x^\alpha + x^{3\alpha}}} dx.$$

(2,0) 6. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ mostre que existe c entre a e b tal que

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a).$$