Capítulo 5

Integracao Numérica

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x	-1	**1**	**2**	**3**	5
$f(x)$	-1	**1**	**-1**	**1**	2

(a) Considerando os 3 pontos destacados na tabela e utilizando a fórmula de Lagrange, construa o polinómio interpolador de $f(x)$.

(b) i. Obtenha 2 valores aproximados para $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, recorrendo a duas fórmulas de quadratura distintas e usando todos os pontos da tabela.

ii. Supondo que

$$\max_{x\in[-1,5]} |f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall_n \in \mathbb{N}$$

com M constante real, determine as expressões para os erros de integração, nos dois casos considerados na alínea anterior.

2. Considere o integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

(a) Determine o seu valor aproximado, considerando quatro subintervalos e utilizando

i. A regra dos Trapézios.

ii. A regra de Simpson.

(b) Faça, em cada um dos casos considerados, uma estimativa do número de subintervalos que se devia considerar caso se pretendesse calcular o integral com um erro inferior a 10^{-4}.

3. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f(x)$

x_i	-2	-1	0	1	6
f_i	4	0	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(a) Utilizando a fórmula interpoladora de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio de grau ≤ 2, $p_2(x)$, que interpola f nos pontos $x_0 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_4 = 6$.

(b) Suponha que pretendemos aproximar o valor $I(f) = \int_{-2}^{6} f(x)\,dx$ por $\int_{-2}^{6} p_2(x)\,dx$. Supondo que as derivadas de f verificam $|f^{(j)}(x)| \leq j/2, \quad j = 1, 2, 3, 4$ no intervalo $[-2, 6]$, determine um majorante para o erro de integração.

4. Calcule o integral

$$\int_0^1 \sqrt{\sin x}\,dx$$

com erro inferior a 10^{-2} usando a regra de Simpson

(a) Aplicada ao integral tal como é dado.

(b) Efectuando primeiro uma mudança de variável "adequada", por exemplo $y = \sqrt{x}$.

(c) Qual a vantagem da utilização desta mudança de variável?

5. A tabela seguinte mostra os resultados obtidos por uma regra de Newton-Cotes (composta) no cálculo do integral $I(f)$ de uma certa função f indefinidamente diferenciável.

n	8	16	32	64
I_n	295.27	272.15	268.97	267.68

O valor I_n representa a aproximação obtida com $n+1$ nós de quadratura. Sabendo que o valor exacto do integral é $I(f) = 267.25$, diga, justificando, que fórmula poderá ter sido usada (Trapézios ou Simpson).

6. Seja $f \in C[a, b]$ uma função tal que f' é integrável em $[a, b]$.

(a) Prove a seguinte estimativa de erro para a regra dos trapézios composta

$$E_n^T(f) = \sum_{j=4}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[\frac{x_{j-1} - x_j}{2} - x \right] f'(x)\,dx$$

onde $x_j = a + j\,h, \quad j = 0, \cdots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$.

(b) Calcule um valor aproximado do integral

$$I(f) = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx,$$

pela regra dos trapézios composta com $h = \frac{1}{8}$. Estime o erro e analise experimentalmente a ordem de convergência.

7. Calcule

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x^3 + 10}\, dx$$

usando as regras dos trapézios e de Simpson com 3,5 e 9 pontos. Melhore os resultados por aplicação do método de Romberg.

8. Pretende-se construir uma fórmula de quadratura do tipo

$$Q(f) = A_0\, f(0) + A_1\, f(1)$$

para aproximar o integral

$$I = \int_0^1 e^x\, f(x)\, dx$$

(a) Calcule A_0 e A_1 de modo que a fórmula seja exacta para funções f do tipo $f(x) = a + bx$.

(b) Seja $f(x) = \sin x$. obtenha uma aproximação de I usando a regra de quadratura obtida em (a) e calcule uma estimativa do erro absoluto.

(c) Determine um valor aproximado para I usando a regra dos trapézios composta com 4 subintervalos.

(d) Determine o número mínimo de subintervalos necessário na regra dos trapézios composta, de modo que o erro absoluto seja inferior a 10^{-2}.

9. Seja $f \in C[a,b]$.Para aproximar $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$, considere-se a sucessão de fórmulas de quadratura

$$Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j^{(n)} f(x_j^{(n)}),$$

onde $x_j^{(n)}$ são pontos distintos de $[a,b]$, $\quad j=0,\cdots,n, \quad n=1,2,\cdots$ e os pesos $A_j^{(n)}$ são determinados por forma a que a fórmula $Q_n(f)$ seja exacta para polinómios de grau $\leq n$. Isto significa neste caso que

$$A_j^{(n)} = \int_a^b \prod_{i=0 i\neq j}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}\,dx.$$

Estas fórmulas são chamadas interpolatórias.

Prove que se existir $B>0$ tal que

$$\sum_{j=0}^{n} |A_j^{(n)}| \leq B, \forall_n \in \mathbb{N},$$

então $\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f)$.

10. Para aproximar o integral $I(f)=\int_0^{2h} f(x)\,dx$, pretende-se construir uma fórmula de integração do tipo

$$Q(f) = A_0 f(h/2) + A_1 f(h) + A_2 f(3h/2),$$

onde A_0, A_1, A_2 são constantes reais.

(a) Determine A_o, A_1, A_2 de modo que a fórmula seja exacta para polinómios de grau ≤ 2.

(b) Determine o grau de precisão da fórmula. Sabendo que

$$I(f) = Q(f) + M\, f^{(4)}(\xi),$$

determine o valor da constante M.

(c) Aplique a fórmula anterior ao cálculo de

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, \cos(\pi(1+x))\,dx$$

e forneça o resultado com três algarismos significativos.

(d) Compare o resultado precedente com o que se obtém aplicando a fórmula de Simpson (à mesma função).

11. Considere o integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,e^{-x}\,dx$.

(a) determine os pesos A_0, A_1 da fórmula de quadratura

$$Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

com $x_0 = 2 - \sqrt{2}$ e $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, de modo que ela seja pelo menos de grau 1.

(b) Mostre que a fórmula assim obtida é de grau 3 (atenda a que $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\, dx = k!$).

12. Pretende-se obter a fórmula de integração

$$Q(f) = A_0 f(0) + A_1 \left[f(x_1) + f(-x_1) \right]$$

Para o cálculo de integrais do tipo $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ de modo que ela seja pelo menos de grau 2.

(a) Exprima A_0 e A_1 em função de x_1.

(b) Mostre que a fórmula obtida é pelo menos de grau 3 e determine x_1 de modo a que ela seja pelo menos de grau 5.