Universidade de Lisboa - Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

NOME____

Número___________________ Curso______________________________________

MATEMÁTICA I

Época de Recurso - 24 de junho de 2014 - Duração: 2 horas - -

Grupo I

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5; cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

1. Considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e seja A^T a matriz transposta de A. Então

(A) $\det\left[AA^T\right]=16$.

(B) $\det\left[AA^T\right]=-16$.

(C) $\det\left[AA^T\right]=0$.

(D) $\det\left[AA^T\right]=4$.

2. Considere a função $f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(\left|x+4\right|-2\right)}{(x+8)(x-5)}$ e seja D_f o domínio de f. Então:

(A) $D_f=(]-\infty,-6]\cup[-2,+\infty[)\setminus\{-8,5\}$ e $\text{front}(D_f)=\{-8,-6,-2,5\}$.

(B) $D_f=(]-\infty,-6[\cup]-2,+\infty[)\setminus\{-8,5\}$ e $\text{front}(D_f)=\{-8,-6,-2,5\}$.

(C) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-8,5\}$ e $\text{front}(D_f)=\{-8,5\}$.

(D) $D_f=(]-\infty,-6[\cup]-2,+\infty[)$ e $\text{front}(D_f)=\{-6,-2\}$.

3. Considere a função $f(x)=\dfrac{x+x\cos x}{e^{2x}-1}$. Então:

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=+\infty$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=1$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=2$.

4. Seja f uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f'(x_1)=0$ e $f'(x_2)=0$, sendo que $f'\left(x\right)\neq 0,\ \forall x\in\left]x_1,x_2\right[$. Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

(A) A função f tem no máximo um zero no intervalo $\left]x_1,x_2\right[$.

(B) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]x_1,x_2\right[$.

(C) A função f nunca se anula em $\left]x_1,x_2\right[$.

(D) Os pontos x_1 e x_2 são pontos de extremo local de f.

5. A área compreendida entre os gráficos das funções $f(x) = -x^2 + 5$ e $g(x) = x^2 - 5$ para $x \in [0, 2]$, é:

(A) 10.

(B) $\frac{44}{3}$.

(C) 20.

(D) $\frac{22}{3}$.

Grupo II

(Cotações: 3.5 (=2.0+1.5); 4.0(=2.0+2.0); 3.0 (=1.5+1.5); 2.0)

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - \alpha y - z = 1 \\ 2x + y - \alpha z = \beta \\ -x + (\alpha+1)\,y + z = -1 \end{cases} \quad , \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Classifique o sistema em função dos valores dos parâmetros α e β, indicando nos casos adequados o grau de indeterminação (ou o n^o de graus de liberdade).

(b) Resolva o sistema, indicando qual o respetivo conjunto solução, nos casos: (i) $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, (ii) $\alpha = 2$ e $\beta = 2$.

2. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

(a) Verifique se a função é prolongável por continuidade ao ponto $x = 1$, estude a função quanto à existência de extremos locais e determine os intervalos de monotonia.

(b) Estude a função quanto às concavidades e à existência de assíntotas oblíquas.

3. Determine:

(a) o raio de convergência e o maior intervalo aberto em que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{5^n}\,(x+2)^n$ é absolutamente convergente.

(b) o polinómio de Taylor de grau 2 (ou a aproximação quadrática) da função $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$, em torno do ponto 1, e aproveite o resultado para calcular um valor aproximado de $\sqrt[5]{1,1}$.

4. Considere uma função f duas vezes diferenciável em $[a, b]$ e com $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que

$$\int_a^b (x-a)\,(x-b)\,f''(x)dx = -2\int_a^b f(x)dx.$$