Universidade de Lisboa – Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

<u>MATEMÁTICA I</u>

Tópicos de Resolução do Exame de Recurso – 24 de junho de 2014

Grupo II

---

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - \alpha y - z = 1 \\ 2x + y - \alpha z = \beta \\ -x + (\alpha+1)y + z = -1 \end{cases} , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(a) Classifique o sistema em função dos valores dos parâmetros α e β, indicando nos casos adequados o grau de indeterminação (ou o nº de graus de liberdade).

(b) Resolva o sistema, indicando qual o respetivo conjunto solução, nos casos:

(i) $\alpha = 3 \; e \; \beta = 1$,

(ii) $\alpha = 2 \; e \; \beta = 2$.

<u>Resolução:</u>

(a) Considere-se $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -\alpha & \beta \\ -1 & \alpha+1 & 1 & -1 \end{array}\right]$ e $n = 3$ (número de incógnitas).

Temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -\alpha & \beta \\ -1 & \alpha+1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+l_1]{l_2-2l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1+2\alpha & -\alpha+2 & \beta-2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\alpha & -\alpha+2 & \beta-2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3-(1+2\alpha)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha+2 & \beta-2 \end{array}\right]$$

Assim:

- Para $\alpha = 2$ e $\beta = 2$, o sistema é possível indeterminado (pois $r[A|B] = r[A] = 2$) com 1 grau de liberdade $\left(\underbrace{3}_{n} - \underbrace{2}_{r[A]} = 1\right)$.
- Para $\alpha = 2$ e $\beta \neq 2$, o sistema é impossível (pois $r[A|B] = 3$ e $r[A] = 2$).
- Para $\alpha \neq 2$ e qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$, o sistema é possível e determinado (pois $r[A|B] = r[A] = 3$).

(b)

(i) Com $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, tendo em conta o feito em **(a)**, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Vindo:

$$\begin{cases} x - 3y - z = 1 \\ y = 0 \\ -z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Pelo que o conjunto solução é dado por $\{(2,0,1)\}$.

(ii) Com $\alpha = 2$ e $\beta = 2$, tendo em conta o feito em **(a)**, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vindo:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Pelo que o conjunto solução é dado por $\{(z + 1, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

3. Determine:

(a) o raio de convergência e o maior intervalo aberto em que a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{5^n}(x+2)^n$ é absolutamente convergente.

(b) o polinómio de Taylor de grau 2 (ou a aproximação quadrática) da função $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$, em torno do ponto 1, e aproveite o resultado para calcular um valor aproximado de $\sqrt[5]{1{,}1}$.

<u>Resolução:</u>

(a) Considerando $y = x + 2$, temos a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{5^n} y^n$, cujo raio de convergência é dado por:

$$r = \lim \left| \frac{\frac{n+3}{5^n}}{\frac{(n+1)+3}{5^{n+1}}} \right| = \lim \left| \frac{(n+3)5^{n+1}}{(n+4)5^n} \right| = \lim \left| \frac{(n+3)5}{n+4} \right| = \lim \left| \frac{5n+15}{n+4} \right| = 5$$

Pelo que esta série é absolutamente convergente para $y \in \,]-5{,}5[$

Sendo $y = x + 2$, vem:

$$-5 < x + 2 < 5 \iff -7 < x < 3$$

Logo a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{5^n}(x+2)^n$ é absolutamente convergente para $x \in \,]-7{,}3[$.

(b) Sendo $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$, o polinómio de Taylor de grau 2 em torno do ponto $a = 1$ é dado por:

$$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!}$$

Temos:

- $f(x) = x^{\frac{1}{5}} \;\Rightarrow\; f(1) = (1)^{\frac{1}{5}} = 1$
- $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \;\Rightarrow\; f'(1) = \frac{1}{5}(1)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}$
- $f''(x) = -\frac{4}{25}x^{-\frac{9}{5}} \;\Rightarrow\; f''(1) = -\frac{4}{25}(1)^{-\frac{9}{5}} = -\frac{4}{25}$

Vindo:

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{5}(x-1) - \frac{2(x-1)^2}{25}$$

Logo:

$$\sqrt[5]{1{,}1} = (1{,}1)^{\frac{1}{5}} = f(1{,}1) \approx 1 + \underbrace{\frac{1}{5}(1{,}1-1)}_{0{,}02} - \underbrace{\frac{2(1{,}1-1)^2}{25}}_{0{,}0008}$$

Pelo que:

$$\sqrt[5]{1{,}1} \approx 1{,}0192$$

Pergunta 2

a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \tag{1}$$

Prolongamento por continuidade:

$$\begin{align}
\lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \tag{2} \\
&= \frac{1}{0^+} = +\infty \tag{3}
\end{align}$$

$$\begin{align}
\lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \tag{4} \\
&= \frac{1}{0^-} = -\infty \tag{5}
\end{align}$$

Logo a função não é prolongável por continuidade ao ponto $x = 1$.

Extremos locais:
A primeira derivada da função é dada por,

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x-1} - \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} \tag{6}$$
$$= \frac{2(x-1)^2-(x^2-2x+1+1)}{(x-1)^2} \tag{7}$$
$$= \frac{2(x-1)^2-(x-1)^2+1)}{(x-1)^2} \tag{8}$$
$$= \frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2} \tag{9}$$
$$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \tag{10}$$
$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \tag{11}$$

Os zeros da primeira derivada são,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \tag{12}$$

Logo os pontos críticos da função são $x = 0$ e $x = 2$.
Uma vez que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \tag{13}$$

temos que $x = 0$ é um ponto de máximo local, sendo o máximo local $f(0) = -2$ e $x = 2$ é um ponto de mínimo local, sendo o mínimo local $f(2) = 2$.
Alternativamente podemos ver que,

$$f''(0) = \frac{2}{-1^3} = -2 < 0 \qquad f''(2) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \tag{14}$$

e pelo teste da segunda derivada chegamos ao mesmo resultado.

Intervalos de monotonia:

$x \in$	$]-\infty, 0[$	$]0, 1[$	$]1, 2[$	$]2, +\infty[$
$f'(x)$	> 0	< 0	< 0	> 0
$f(x)$	Crescente	Decrescente	Decrescente	Crescente

Tabela 1: Intervalos de monotonia da função $f(x)$.

b)

A segunda derivada da função é dada por,

$$f''(x) = \frac{2x-2}{(x-1)^2} - 2\frac{x(x-2)}{(x-1)^3} \quad (15)$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1) - 2x(x-2)}{(x-1)^3} \quad (16)$$

$$= \frac{(2x^2-2x) - (2x-2) - (2x^2-4x)}{(x-1)^3} \quad (17)$$

$$= \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} \quad (18)$$

$$= \frac{2}{(x-1)^3} \quad (19)$$

$$(20)$$

Concavidades:

$x \in$	$]-\infty, 1[$	$]1, +\infty[$
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	Côncava	Convexa

Tabela 2: Concavidades da função $f(x)$.

Assíntotas oblíquas:
À direita,

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+2}{x(x-1)} = 1 \quad (21)$$

$$p = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)} - x = \tag{22}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{(x-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x+2}{x-1} = -1 \tag{23}$$

À esquerda,

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)} = 1 \tag{24}$$

$$p = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)} - x = \tag{25}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{(x-1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x+2}{x-1} = -1 \tag{26}$$

Logo a recta $y = x - 1$ é uma assíntota oblíqua da função $f(x)$ (à esquerda e à direita).

4.

R: Aplicando o método de primitivação por partes, temos que

$$\int (x-a)(x-b) f''(x)dx = (x-a)(x-b) f'(x) - \int ((x-b)+(x-a)) f'(x)dx.$$

Aplicando novamente a primitivação por partes, obtemos

$$\int ((x-b)+(x-a)) f'(x)dx = ((x-b)+(x-a)) f(x) - \int 2f(x)dx,$$

e portanto

$$\begin{aligned}\int (x-a)(x-b) f''(x)dx &= (x-a)(x-b) f'(x) - ((x-b)+(x-a)) f(x) \\ &\quad + 2\int f(x)dx + C.\end{aligned}$$

Logo, como $f(a) = f(b) = 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)(x-b) f''(x)dx &= \left[(x-a)(x-b) f'(x) - ((x-b)+(x-a)) f(x)\right]_a^b \\ &\quad + 2\int_a^b f(x)dx \\ &= 0 - (b-a)f(b) + (a-b)f(a) + 2\int_a^b f(x)dx \\ &= 2\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

No enunciado havia uma gralha: a igualdade apresentada era $\int_a^b (x-a)(x-b) f''(x)dx = -2\int_a^b f(x)dx$ e não $\int_a^b (x-a)(x-b) f''(x)dx = 2\int_a^b f(x)dx$. De forma a não prejudicar nenhum aluno, na correcção ambas as igualdades foram consideradas correctas.