Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

ANÁLISE NUMÉRICA

Exame em Época de Recurso 24/06/2014

Parte I

1. Considere a equação $4x - \sin(1 + x^2) = 0$.

   (a) Mostre que a equação tem uma única solução $z \in \mathbb{R}$ e que a sucessão $x_{n+1} = \frac{1}{4}\sin(1 + x_n^2)$ converge para z, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$.

   (b) Escolha uma aproximação inicial para a qual o método de Newton seja garantidamente convergente e determine uma aproximação de z com dois algarismos significativos.

2. Considere o sistema de equações dado por

$$4x + y - \sin(x - y) = 0, \quad 4y + \cos(x + y) = 0.$$

   (a) Mostre que existe uma e uma só solução do sistema no conjunto $D = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

   (b) Efectue três iterações do método do ponto fixo e estime o erro cometido.

3. Considere o sistema linear $Ax_\varepsilon = b_\varepsilon$, dado por

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

   Mostre que o método de Jacobi aplicado à resolução deste sistema é convergente e, tomando $\varepsilon = 1/10$, calcule três iterações deste método. Determine ainda um majorante para $\|x_{1/10}^{(3)} - x_0\|_\infty$. (Obs: $\|A^{-1}\|_\infty = 1$)

Parte II

1. Suponha que dispõe da seguinte tabela de valores de uma função $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, suficientemente regular, e tal que $\sup\limits_{0 \le x \le 4} |f^{(n)}(x)| \le n, \quad n \ge 2$.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	0.00	-1.52	1.33	3.04	3.00

   (a) Justificando todos os passos, calcule

$$\min_{\alpha,\beta} \sum_{i=0}^{4} (f_i - \alpha - \beta \cos x_i)^2.$$

   (b) Utilizando o polinómio interpolador de f em três pontos da tabela, determine um valor aproximado de $f(3/2)$, assim como um majorante para o erro cometido.

2. O comprimento do gráfico de uma função suficientemente regular $y = f(x)$, restrita ao intervalo $[a,b]$, é dado por

$$comp(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

   Utilizando o método de Simpson, determine o comprimento da parábola de equação $y = x^2$ para $x \in [0,1]$, com três algarismos significativos.

3. Considere o problema de valor inicial $y' = \dfrac{1}{1+y^4}, \quad y(0) = 0$. Determine um valor aproximado de $y(1)$ utilizando o método de Euler com $h = 0.2$ e estime o erro cometido.

4. Seja $p_n(x)$ o polinómio interpolador de $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ nos pontos igualmente espaçados $a = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b$. Mostre que se existirem constantes positivas c, M tais que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \le cM^n$ então $\lim \|f - p_n\|_\infty = 0$.