Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
ANÁLISE NUMÉRICA

Avaliação Contínua - Teste 1 28/04/2014

---

1. Considere dois vectores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^n$, a partir dos quais se pretende calcular $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Mostre que se o erro relativo nas componentes dos dois vectores for semelhante, isto é, se $\varepsilon_{x_i} \approx \varepsilon_{y_i} \approx \varepsilon, i = 1, \cdots n$, então é válida a fórmula $\varepsilon_{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}} \approx 2\varepsilon$.

2. Considere a equação $2e^{-x} - x + 3 = 0$.

   (a) Mostre que esta equação tem uma e uma só solução z no intervalo $[3, 4]$ e indique uma sucessão (x_n) convergente para z. Calcule x_4 e apresente majorantes para os erros absoluto e relativo cometidos.

   (b) Utilizando agora o método de Newton, obtenha uma aproximação de z com erro inferior a 0.5×10^{-5}.

3. Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$, em que $b, x \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in]0, 1[.$$

   (a) Mostre que a matriz A admite uma factorização de Cholesky e determine-a. Tomando $a = 0.1$, utilize a factorização encontrada para resolver o sistema $Ax = (1, 0, 0)^T$.

   (b) Obtenha uma condição sobre o parâmetro a que garanta a convergência do método de Jacobi e, através deste, obtenha uma aproximação da solução do sistema referido na alínea anterior com erro inferior 0.5×10^{-2}, medido na norma $\| \cdot \|_\infty$.

   (c) Ainda para $a = 0.1$, localize os valores próprios da matriz $C = A + \text{diag}\{1, 4, 8\}$. Realizando 2 iterações do método das potências obtenha uma aproximação do valor próprio dominante da matriz C.

   (d) Considere agora o vector $\tilde{\boldsymbol{x}}$, solução do sistema quando $a = 0.11$. Sabendo que $\|A^{-1}\|_\infty = (1 + a)/(1 - a)$, determine um majorante para o erro relativo $\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_\infty / \|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

4. Supondo que a sucessão definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{f'(x_n)^3}$$

   converge para uma solução da equação $f(x) = 0$, mostre que a ordem de convergência é pelo menos 3.