Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Probabilidades – 2º ano MAEG

2º Semestre 2013/2014

EXAME ÉPOCA NORMAL 6 Junho 2014

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Justifique todas as respostas

(1) Numa fábrica produz-se sumo de fruta. A procura diária (em milhares de litros) é representada por uma v.a. contínua com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 1 < x < 3 \\ \alpha(6-x), & 3 \leq x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(a) Calcule α.

(b) Nos dias em que as vendas são superiores a 2 mil litros, qual a probabilidade de se venderem entre 2 e 3.5 mil litros?

(c) Com o preço por litro fixado em 0.50 euros, determine a função de distribuição da receita diária supondo que a fábrica tem uma capacidade de produção ilimitada.

(2) Seja X uma v.a. discreta com distribuição geométrica. Mostre que

$$P(X > m+n | X > m) = P(X > n), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

(3) Seja X uma v.a. contínua com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde $\alpha > 0$.

(a) Calcule o valor esperado μ e a variância σ^2 de X.

(b) Determine a função geradora de momentos de X.

(c) Repita a alínea anterior para $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ onde $X_1, X_2 \ldots$ é uma sucessão de v.a. independentes com a mesma distribuição de X.

(d) Indique uma aproximação da distribuição da v.a. dada por

$$\frac{Y_{1000} - E(Y_{1000})}{\sqrt{V(Y_{1000})}}.$$

(4) Considere o vector aleatório contínuo (X, Y) com função densidade

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{2-(x+y)}, & x > 1, y > 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(a) Decida se X e Y são v.a. independentes.

(b) Calcule a regressão do tipo I de Y sobre X.