

Probabilidades – 2º ano MAEG
2º Semestre 2013/2014

EXAME ÉPOCA DE RECURSO 25 Junho 2014

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Justifique todas as respostas

- (1) Numa fábrica produz-se carros. A probabilidade de um carro ter um defeito é de 1%. Os carros são verificados de forma independente à medida que são produzidos.
- (a) Qual a probabilidade de se verificarem mais de 150 carros até se encontrar um defeituoso, sabendo que os primeiros 100 não apresentam defeitos?
 - (b) Sabendo que custa 10 euros verificar cada carro, calcule quanto se gasta em média até ser detectado um defeito.

- (2) Seja X uma v.a. contínua com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde $\alpha > 0$.

- (a) Calcule os momentos de terceira e quarta ordens relativamente à origem.
- (b) Determine a função característica de X .
- (c) Se X_1, \dots, X_n são v.a. independentes com a mesma distribuição de X , calcule a função distribuição de $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

- (3) Seja X uma v.a. contínua tal que $E(\sqrt{|X|}) = 1$.
- (a) Dado $a > 0$, mostre que $P(\sqrt{|X|} \geq a) \leq a^{-1}$.
 - (b) Encontre um intervalo, o mais pequeno possível, que contenha o valor de $P(-4 < X < 4)$.

- (4) Considere o vector aleatório contínuo (X, Y) com função densidade

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} e^{-(x^2 - \sqrt{2}xy + y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e função geradora de momentos

$$M_{(X,Y)}(s_1, s_2) = e^{(s_1^2 + \sqrt{2}s_1s_2 + s_2^2)/2}.$$

- (a) Calcule $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$ e $C(X, Y)$.
- (b) Determine as densidades marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e diga quais são as distribuições de X e Y .
- (c) A partir da função densidade mostre que a função geradora de momentos de (X, Y) é dada pela expressão acima.