Parte I
Medida e Integração

Nesta primeira parte do curso, faremos uma breve introdução à teoria da medida e integral de Lebesgue. Os resultados que iremos apresentar são fundamentais para o desenvolvimento da teoria das probabilidades.

Em teoria da medida, pretende-se construir funções que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ associam um valor positivo, uma medida que generalize o conceito usual de comprimento de um intervalo. Como motivação, relembremos brevemente o integral de Riemann. O integral de Riemann de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pode ser aproximada por somas do tipo

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathrm{comp}(E_i)\,,$$

onde E_i são intervalos disjuntos cuja união é $[a, b]$, $x_i \in E_i$ e $\mathrm{comp}(E_i)$ é o comprimento do intervalo E_i. Na teoria das probabilidades, o integral de Riemann é insatisfatório, uma vez que existem funções simples para as quais não é possível definir o seu integral de Riemann. Como exemplo, imagine que se escolhe ao acaso um número real entre 0 e 1. Estamos interessados em saber a probabilidade de o número escolhido ser racional. Para tal, definimos uma função χ (variável aleatória) que atribui 1 aos racionais e 0 aos irracionais. Desta forma, a probabilidade de o número escolhido ser racional é dada pelo integral da função χ entre 0 e 1. No entanto, não é difícil verificar que o integral de Riemann dessa função não está bem definido (uma vez que a soma superior é igual a 1 e no entanto a soma inferir é igual a 0). Com o objectivo de generalizar o integral de Riemann, o matemático francês Henri Lebesgue procurou uma definição de integral que se adequasse às funções que encontramos em teorias das probabilidades. Henri Lebesgue reparou que o problema residia na forma como se mede o comprimento de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Para resolver esse problema, ele procurou uma medida m que satisfizesse as seguintes propriedades:

1. $m(\emptyset) = 0$. (o conjunto vazio tem medida 0)
2. $m(A) \geq 0$ para qualquer $A \subset \mathbb{R}$.
3. $m(I) = \mathrm{comp}(I)$ para qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$.
4. $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ para quaisquer $A_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots$, disjuntos dois a dois.
5. $m(A + x) = m(A)$ para todo $A \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ onde $A + x = \{a + x : a \in A\}$.

No entanto, para que estas condições fossem compatíveis entre si, teve-se que restringir o cálculo da medida a certos subconjuntos de $\mathbb{R}$, denominados por *conjuntos mensuráveis*.

1 Espaços de medida

1.1 σ-álgebras

Definição 1.1. Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{P}(X)$ a colecção de todos os subconjuntos de X. Uma subcolecção $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma **σ-álgebra** sse

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. se $A \in \mathcal{F}$ então $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$,
3. se $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Ao par $(X, \mathcal{F})$ chamamos **espaço mensurável** e os elementos de $\mathcal{F}$ são os **conjuntos mensuráveis**.

Exemplo 1.1. Alguns exemplos de σ-álgebras:

1. $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$
2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, A, A^{\mathrm{c}}\}$
3. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$

Exercício 1. Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Mostre que

1. $X \in \mathcal{F}$.
2. se $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.
3. se $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ então $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
4. se $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ então $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$
5. se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Proposição 1.2. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{C}$ uma colecção de subconjuntos de X. Então existe uma única σ-álgebra $\mathcal{F}^*$ que contêm $\mathcal{C}$ tal que se $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra que contêm $\mathcal{C}$ então $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{F}$ o conjunto de todas as σ-álgebras que contêm $\mathcal{C}$. Note-se que $\mathfrak{F}$ é não vazio uma vez que $\mathcal{P}(X) \in \mathfrak{F}$. Seja $\mathcal{F}^*$ a intersecção de todas as σ-álgebras pertencentes a $\mathfrak{F}$, ou seja

$$\mathcal{F}^* = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{F}, \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}\} \,.$$

É claro que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}^*$. Resta apenas mostrar que $\mathcal{F}^*$ é também uma σ-álgebra. Iremos demonstrar que $\mathcal{F}^*$ é fechado para uniões numeráveis, deixando a verificação das restantes condições ao cuidado do leitor. Sejam $A_i \in \mathcal{F}^*$, $i = 1, 2, \ldots$. Por definição, temos que $A_i \in \mathcal{F}$ para todo o $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ e $i = 1, 2, \ldots$. Segue do facto de $\mathcal{F}$ ser uma σ-álgebra que $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$ para todo o $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$. Logo $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}^*$ como pretendíamos mostrar. □

A σ-álgebra $\mathcal{F}^*$ obtida na Proposição 1.2 é designada por **σ-álgebra gerada por** $\mathcal{C}$ e denota-se por $\sigma(\mathcal{C})$. Num certo sentido, $\sigma(\mathcal{C})$ é a "menor" σ-álgebra que contém a colecção $\mathcal{C}$. Uma aplicação relevante deste resultado é a seguinte. Seja $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{C}$ a colecção de todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Recorde-se que um conjunto aberto é um conjunto que é uma união (possivelmente não-numerável) de intervalos abertos (do tipo $]a, b[$). A σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\text{abertos de } \mathbb{R})$ gerada pelos abertos de $\mathbb{R}$ é designada por **σ-álgebra de Borel** e os seus conjuntos mensuráveis designados por **Borelianos**. Note-se que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contêm também os fechados de $\mathbb{R}$ (complementares de abertos), uniões numeráveis de fechados de $\mathbb{R}$, intersecções numeráveis de abertos/fechados de $\mathbb{R}$, etc.

Exercício 2. Mostre que a intersecção numerável de σ-álgebras é uma σ-álgebra. Será a união numerável de σ-álgebras também uma σ-álgebra?

Exercício 3. Seja X um conjunto e $A \subset X$. Determine $\sigma(\{A\})$.

Exercício 4. Mostre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\text{fechados de } \mathbb{R})$.

Exercício 5. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que se A^c é numerável então A é Boreliano.

1.2 Medidas

Definição 1.2. Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$, uma função $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ é uma **medida** sse

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. para qualquer sucessão de subconjuntos $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, disjuntos dois a dois $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ têm-se

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\,,$$

A segunda condição é conhecida por **σ-aditividade**. Ao tripleto $(X, \mathcal{F}, \mu)$ designamos por **espaço de medida**

Exemplo 1.3. 1. Seja X um conjunto qualquer, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$. Para qualquer $A \in \mathcal{P}(X)$ define-se a **medida de contagem** como

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{se} \quad A \text{ é finito,} \\ \infty & \text{se} \quad A \text{ é infinito.} \end{cases}$$

2. Considere-se o espaço mensurável no exemplo anterior. Dado $x \in X$ e $A \in \mathcal{F}$ define-se

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A, \\ 0 & \text{se} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Esta medida designa-se por **medida de Dirac** ou **massa unitária concentrada** em x.

Proposição 1.4 (Propriedades da medida)**.** *Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Então*

1. **(aditividade finita)** *Sejam $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, disjuntos dois a dois, então $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$.*
2. **(monotonia)** *Sejam $A, B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
3. **(continuidade inferior)** *Sejam $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$ tal que*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots,$$

então

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

4. **(continuidade superior)** *Sejam $A_i \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A_1) < \infty$ e*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots,$$

então

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Demonstração.

1. Sejam $B_i = A_i$ para $i = 1, \dots, n$ e $B_i = \emptyset$ para $i > n$. É claro que $\mu(B_i) = \mu(A_i)$ para $i = 1, \dots, n$ e $\mu(B_i) = 0$ para $i > n$. Pela σ-aditividade obtemos que

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

2. Uma vez que $B = A \cup (B \setminus A)$ e $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, segue da propriedade anterior que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Logo $\mu(A) \leq \mu(B)$.
3. Sejam $B_1 = A_1$ e $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ para $i = 2, 3, \ldots$. Note-se que os conjuntos B_i são disjuntos dois a dois. Mais, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Logo, pela σ-aditividade obtemos que

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)\,.$$

Por outro lado, $\mu(B_i) = \mu(A_i) - \mu(A_{i-1})$ (mostre esta igualdade). Logo

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \mu(A_n)\,.$$

Fazendo $n \to \infty$ têm-se $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} A_n$, de onde segue o resultado.
4. Deixa-se como exercício.

$\square$

Exercício 6. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Mostre que para qualquer $A, B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset B$ tem-se $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Exercício 7. (**σ-subaditividade**) Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{F}$. Mostre que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Exercício 8. Sejam μ_1 e μ_2 duas medidas do espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$. Mostre que $\mu_1 + \mu_2$ definida por $(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$ para todo o $A \in \mathcal{F}$ é uma medida de $(X, \mathcal{F})$.

Exercício 9. Demonstre a propriedade (4) da proposição anterior, isto é, a continuidade superior da medida.

Exercício 10. Mostre que a condição $\mu(A_1) < \infty$ não pode ser retirada do enunciado da propriedade (4). (Dica: construa um contra-exemplo considerando um conjunto infinito X e a medida de contagem μ.)