

# Exercícios de Teoria da Probabilidade e Processos Estocásticos Parte I

2014/2015

Os exercícios assinalados com (\*) têm um nível de dificuldade superior.

**Exercício 1.** Seja  $(X, \mathcal{F})$  um espaço mensurável. Mostre que

1.  $X \in \mathcal{F}$ .
2. se  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  então  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$ .
3. se  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  então  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .
4. se  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  então  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$ .
5. se  $A, B \in \mathcal{F}$  então  $A \setminus B \in \mathcal{F}$ .

**Exercício 2.** Mostre que a intersecção numerável de  $\sigma$ -álgebras é uma  $\sigma$ -álgebra. Será a união numerável de  $\sigma$ -álgebras também uma  $\sigma$ -álgebra?

**Exercício 3.** Seja  $A \subset X$ . Determine  $\sigma(\{A\})$ .

**Exercício 4** (\*). Mostre que  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\text{fechados de } \mathbb{R})$ .

**Exercício 5.** Mostre que se  $A^c$  é numerável então  $A$  é Boreliano.

**Exercício 6.** Seja  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  um espaço de medida. Mostre que para qualquer  $A, B \in \mathcal{F}$  tal que  $A \subset B$  tem-se  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .

**Exercício 7.** ( $\sigma$ -subaditividade) Sejam  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  um espaço de medida e  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de elementos de  $\mathcal{F}$ . Mostre que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

**Exercício 8.** Sejam  $\mu_1$  e  $\mu_2$  duas medidas do espaço mensurável  $(X, \mathcal{F})$ . Mostre que  $\mu_1 + \mu_2$  definida por  $(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$  para todo o  $A \in \mathcal{F}$  é uma medida de  $(X, \mathcal{F})$ .

**Exercício 9.** Considere um espaço de medida  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  e sejam  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  tal que  $\mu(A_1) < \infty$  e  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ . Mostre que

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

**Exercício 10.** Mostre que a condição  $\mu(A_1) < \infty$  não pode ser retirada do enunciado do exercício anterior. (Dica: construa um contra-exemplo considerando um conjunto infinito  $X$  e a medida de contagem  $\mu$ .)

**Exercício 11.** Seja  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  um espaço de medida e  $A, B \subset X$  dois conjuntos. Mostre que são equivalentes

1.  $A$  é  $\mu$ -equivalente a  $B$ .
2. existe um conjunto  $N \subset X$  de medida nula tal que  $A \cap N^c = B \cap N^c$ .
3. existe  $C \in \mathcal{F}$ ,  $\mu(C) = 0$  tal que  $B \setminus C \subset A \subset B \cup C$ .

**Exercício 12.** Mostre que se  $A \subset \mathbb{R}$  é um conjunto finito ou numerável então  $A$  tem medida de Lebesgue nula.

**Exercício 13.** Considere a seguinte coleção de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{F} = \{E \subset \mathbb{R} : E \text{ é numerável ou } E^c \text{ é numerável}\}.$$

Mostre que:

1.  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra e  $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .
2.  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pela coleção  $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ .
3. Encontre uma medida  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  tal que o conjunto vazio é o único conjunto de medida nula, ou seja, se  $\mu(E) = 0$  então  $E = \emptyset$ .

**Exercício 14** (Conjunto de Cantor). Considere o intervalo  $A_0 = [0, 1]$ . Divida-o em três partes iguais e retire o intervalo aberto do meio. Obtém-se assim o intervalo  $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ . Repita o mesmo processo, agora para cada intervalo  $[0, \frac{1}{3}]$  e  $[\frac{2}{3}, 1]$ , obtendo  $A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ . Continuando com a subdivisão, obtém-se uma sucessão de conjuntos  $(A_n)_{n=0,1,2,\dots}$ . A intersecção

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n,$$

é designada por conjunto de Cantor. Mostre que:

1.  $A_n$  é uma união disjunta de  $2^n$  intervalos fechados.
2.  $C$  é não vazio e Boreliano.
3.  $C$  tem medida de Borel nula.

**Exercício 15** (\*). [Borel-Cantelli] Considere um espaço de medida  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  e  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  uma sucessão de conjuntos mensuráveis tais que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ . Mostre que o conjunto dos pontos de  $X$  que pertencem a um número infinito de  $A_n$ 's tem medida nula, ou seja,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0.$$

**Exercício 16** (\*). Seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de distribuição. Mostre que:

1. O conjunto dos pontos de descontinuidade de  $F$  é numerável.
2. Se  $F$  é contínua então  $m_F(\{x\}) = 0$ .

**Exercício 17.** Seja  $F$  uma função de distribuição contínua. Mostre que se  $A \subset \mathbb{R}$  é um conjunto finito ou numerável então  $m_F(A) = 0$ .

**Exercício 18.** Dê um exemplo de uma função de distribuição  $F$  tal que  $m_F(\{1\}) = 1$ .

**Exercício 19.** Considere a função,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ x^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Prove que  $F$  é uma função de distribuição.
2. Seja  $\mu$  a medida de Borel-Stieltjes associada a  $F$ . Calcule  $\mu([3, 9])$ .

**Exercício 20.** Considere a medida  $\mu = 3\delta_2 + 2\delta_3$  em  $\mathbb{R}$ . Determine a função de distribuição  $F$  tal que  $\mu = m_F$ .

**Exercício 21.** Sejam  $Y$  e  $Z$  espaços métricos e  $X$  um espaço mensurável. Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função mensurável e  $g : Y \rightarrow Z$  é uma função contínua então  $g \circ f : X \rightarrow Z$  é uma função mensurável.

**Exercício 22.** Mostre que se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são duas funções mensuráveis então

1.  $f + g$  é mensurável.

2.  $f \cdot g$  é mensurável.

**Exercício 23.** Seja  $X$  um espaço métrico e  $(X, \mathcal{B})$  o espaço mensurável onde  $\mathcal{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel. Mostre que se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua então  $f$  é mensurável.

**Exercício 24.** Dado  $c \in \mathbb{R}$ , mostre que a função constante  $f(x) = c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  é uma função mensurável.

**Exercício 25.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e defina-se

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

a parte positiva e negativa de  $f$ , respectivamente. Mostre que  $f$  é mensurável sse  $f^+$  e  $f^-$  são mensuráveis. (Dica:  $f^+ = f \cdot \chi_E$  onde  $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$ )

**Exercício 26.** Mostre que se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável então  $|f|$  também é mensurável.

**Exercício 27.** Seja  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função mensurável. Dado  $a \in \mathbb{R}$ , mostre que o conjunto de nível  $\{x \in X : f(x) = a\}$  é mensurável.

**Exercício 28.** Considere um espaço mensurável  $(X, \mathcal{F})$  e um espaço topológico  $Y$ . Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função mensurável. Prove que a coleção de conjuntos  $\mathcal{C} = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra.

**Exercício 29.** Mostre toda a função simples é mensurável.

**Exercício 30.** Sejam  $\varphi, \psi$  funções simples e  $a > 0$ . Mostre que  $\varphi + \psi$  e  $a\varphi$  são funções simples.

**Exercício 31.** Calcule o integral de Lebesgue em  $A \subset [0, \infty)$  relativo a  $m$  das seguintes funções simples:

1.  $\phi(x) = [x]$  e  $A = [0, 10]$ .

2.  $\phi(x) = [x^2]$  e  $A = [0, 2]$ .

Nota: o símbolo  $[x]$  denota a parte inteira do número  $x$ .

**Exercício 32.** Sejam  $\varphi, \psi$  duas funções simples em  $X$ . Mostre que se  $\varphi \leq \psi$  então  $\int_E \varphi d\mu \leq \int_E \psi d\mu$  para todo conjunto mensurável  $E$ .

**Exercício 33.** Sejam  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  duas funções mensuráveis. Mostre que  $f + g$  e  $f \cdot g$  são funções mensuráveis de  $X \rightarrow [0, \infty]$ . (Dica: Use o facto de o limite de funções mensuráveis ser mensurável e qualquer função mensurável é o limite de funções simples).

**Exercício 34** (\*). Considere um espaço de medida  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ , uma função mensurável  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  e  $E \in \mathcal{F}$ . Mostre que

$$\int_E f d\mu = \int_X \chi_E \cdot f d\mu.$$

**Exercício 35** (Desigualdade de Markov). Considere um espaço de medida  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  e uma função mensurável  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ . Mostre que para  $\lambda \in ]0, \infty[$ ,

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f d\mu.$$

**Exercício 36** (\*). Sejam  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ,  $n = 1, 2, \dots$  funções mensuráveis e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \forall x \in X.$$

Mostr que,

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

(Dica: Considere em primeiro lugar uma soma finita e use o Teorema da convergência monótona.)

**Exercício 37.** Mostre que a função  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  definida por

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{F}$$

é uma medida. (Dica: Use as propriedades do integral de Lebesgue e o exercício anterior)

**Exercício 38.** Considere o espaço de medida  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  onde  $\mu$  é a medida de contagem. Seja  $A = \{x_1, x_2, x_3\}$  um subconjunto de  $X$  e  $h : X \rightarrow [0, \infty]$  uma função mensurável. Mostre que

1.  $\chi_A \cdot h$  é uma função simples, onde  $\chi_A$  é a função característica de  $A$ .
2. Calcule  $\int_A h d\mu$ .

**Exercício 39.** Considere-se o espaço mensurável  $(X, \mathcal{P}(X))$ . Seja  $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  um subconjunto numerável de  $X$  e  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  a seguinte função

$$\mu(E) = \sum_{x_i \in E} \alpha_i,$$

onde  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots$  são números reais não negativos. Mostre que

1.  $\mu$  é uma medida, designada por medida discreta.
2.  $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i}$  onde  $\delta_{x_i}$  é a medida de Dirac.
3. Dada uma função mensurável  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ ,

$$\int_E f d\mu = \sum_{x_i \in E} f(x_i) \alpha_i.$$

**Exercício 40 (\*)**. Considere um espaço de medida  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  e uma função mensurável  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ . Mostre que se  $\int_X f d\mu < \infty$  então  $f(x) < \infty$  quase certamente.

**Exercício 41.** Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + nx^3} dx.$$

**Exercício 42.** Calcule

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \chi_{[0, n]} dm.$$

**Exercício 43.** Considere-se as seguintes medidas em  $([0, 1], \mathcal{B})$ :  $\mu_1 = \delta_0$ ,  $\mu_2 = m$  e  $\mu_3 = \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2}$ . Para que  $i \neq j$  se tem  $\mu_i \ll \mu_j$ ? Determine a derivada no sentido de Radon-Nikodym em cada caso.

**Exercício 44.** Considere as seguintes medidas em  $([0, 1], \mathcal{B})$ :  $\lambda = \delta_0 + m$  e  $\mu = \delta_1 + m$ . Determine:

1. A decomposição de Lebesgue de  $\lambda$  relativamente a  $\mu$ , ou seja, o par  $(\lambda_a, \lambda_s)$  tal que

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \text{onde } \lambda_a \ll \mu \text{ e } \lambda_s \perp \mu.$$

2. a derivada de Radon-Nikodym de  $\lambda_a$  relativamente a  $\mu$ .

**Exercício 45 (\*)**. Considere dois espaços mensuráveis  $(X_i, \mathcal{F}_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Mostre que se  $F$  é um conjunto mensurável de  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$  então a secção  $F_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in F\}$  é um conjunto  $\mathcal{F}_2$ -mensurável. (Dica: Mostre que a colecção  $\mathcal{G} = \{F \in \mathcal{F} : F_{x_1} \in \mathcal{F}_2, \forall x_1 \in X_1\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra que contém todos os rectângulos mensuráveis).