Proposição 2.7. *Sejam Y e Z espaços métricos e X um espaço mensurável. Se $f : X \to Y$ é uma função mensurável e $g : Y \to Z$ é uma função contínua então $g \circ f : X \to Z$ é uma função mensurável.*

Exercício 18. Demonstre a proposição anterior. (Dica: use as definições de continuidade e mensurabilidade)

Proposição 2.8. *Sejam X um espaço mensurável, Y um espaço métrico, $u, v : X \to \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis e $\phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ uma função continua. Então $h : X \to Y$ definida por $h(x) = \phi(u(x), v(x))$ é uma função mensurável.*

Demonstração. É suficiente demonstrar que a função $f : X \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (u(x), v(x))$ é mensurável. De facto, como $h = \phi \circ f$ e ϕ é contínua, basta aplicar a Proposição 2.7.

Resta então provar que f é mensurável, ou seja, para qualquer aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tem-se que $f^{-1}(A)$ é mensurável. Procedemos em dois passos:

1. Considere-se primeiro abertos do tipo $A = I \times J$ (rectângulos) onde $I, J \subseteq \mathbb{R}$ são dois intervalos abertos. Então, segue da definição de f que

$$f^{-1}(I \times J) = u^{-1}(I) \cap v^{-1}(J) .$$

   Como u e v são mensuráveis, logo $u^{-1}(I)$ e $v^{-1}(J)$ são conjuntos mensuráveis de X, tal como sua intersecção. Logo $f^{-1}(I \times J)$ é mensurável.

2. Como todo o aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como uma união numerável de rectângulos abertos $I_n \times J_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (porquê?) então

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \times J_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n \times J_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} u^{-1}(I_n) \cap v^{-1}(J_n) .$$

   Como $u^{-1}(I_n) \cap v^{-1}(J_n)$ é um conjunto mensurável (pelo argumento do ponto 1.) e a união numerável de conjuntos mensuráveis é mensurável, segue que $f^{-1}(A)$ é mensurável.

□

Exercício 19. Mostre, usando a proposição anterior, que se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são duas funções mensuráveis então

1. $f + g$ é mensurável.
2. $f \cdot g$ é mensurável.

Observação 2.9. Do exercício anterior conclui-se que o conjunto das funções mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$ é um espaço linear.

De seguida, enunciaremos mais dois resultados que fornecem condições equivalentes para verificar a mensurabilidade de funções.

Dado um espaço métrico Y, designamos por $\mathcal{B}(Y)$ a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos de Y, ou seja,

$$\mathcal{B}(Y) = \sigma(\{\text{abertos de } Y\}) .$$

À σ-álgebra $\mathcal{B}(Y)$ chamamos **σ-álgebra de Borel de** Y e os seus conjuntos mensuráveis os **Borelianos de** Y. Note-se que esta definição generaliza para qualquer espaço métrico o conceito de σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.

Proposição 2.10. *Sejam X um espaço mensurável, Y um espaço métrico e $f : X \to Y$. São equivalentes:*

1. *f é uma função mensurável.*
2. *$f^{-1}(A)$ é mensurável qualquer que seja o Boreliano A de Y.*

Demonstração. Uma vez que os abertos de Y são também Borelianos de Y então é claro que 2. implica 1. Mostremos então que 1. implica 2. Considere-se a colecção de conjuntos

$$\mathcal{C} = \left\{A \subset Y : f^{-1}(A) \text{ é um conjunto mensurável}\right\} .$$

Quer-se provar que $\mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{C}$. Uma vez que f é mensurável então $\mathcal{C}$ contém todos os abertos de Y. Por outro lado, usando as propriedades da imagem inversa mostra-se sem dificuldade que $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra de Y. Como a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(Y)$ é a "menor" σ-álgebra que contém $\mathcal{C}$ segue que $\mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{C}$. □

Proposição 2.11. *Seja X um espaço mensurável e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. São equivalentes:*

1. *f é uma função mensurável.*
2. *$f^{-1}(]a, \infty])$ é mensurável qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Como $]a, \infty]$ é aberto de $\overline{\mathbb{R}}$ segue que 1. implica 2. Para demonstrar a implicação inversa, considere-se (como na proposição anterior) o conjunto

$$\mathcal{C} = \left\{A \subset \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}(A) \text{ é um conjunto mensurável}\right\} .$$

Quer-se mostrar que $\mathcal{C}$ contém todos os abertos de $\overline{\mathbb{R}}$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e vejamos que $\mathcal{C}$ contém os seguintes intervalos:

1. $]a,\infty] \in \mathcal{C}$. Segue por hipótese uma vez que $f^{-1}(]a,\infty])$ é mensurável.
2. $[-\infty,b] \in \mathcal{C}$. De facto,
$$f^{-1}([-\infty,b]) = X \setminus f^{-1}(]b,\infty])\,.$$
Como $f^{-1}(]b,\infty])$ é mensurável temos que $X \setminus f^{-1}(]b,\infty])$ é mensurável.
3. $]a,b] \in \mathcal{C}$. De facto,
$$f^{-1}(]a,b]) = f^{-1}([-\infty,b]\cap]a,\infty]) = f^{-1}([-\infty,b]) \cap f^{-1}(]a,\infty])\,.$$
Como $f^{-1}([-\infty,b])$ e $f^{-1}(]a,\infty])$ são mensuráveis, segue que $f^{-1}(]a,b])$ é mensurável.
4. $]a,b[\in \mathcal{C}$. De facto, tome-se uma sucessão crescente b_n e convergente para b. Então
$$f^{-1}(]a,b[) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}]a,b_n]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(]a,b_n])\,.$$
Como $f^{-1}(]a,b_n])$ é mensurável para todo $n = 1,2,\ldots$ segue que $f^{-1}(]a,b[)$ é mensurável.

Finalmente, como todo o aberto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ pode ser escrito como uma união numerável de intervalos $I_n \in \mathcal{C}$ do tipo 1, 2, 3 ou 4 temos que
$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n)\,,$$
de onde segue que A é mensurável. Logo $\mathcal{C}$ contém todos os abertos de $\overline{\mathbb{R}}$. $\square$

Exercício 20. Seja X um espaço topológico e $(X,\mathcal{B})$ o espaço mensurável onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel de X. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então f é mensurável.

Exercício 21. Dado $c \in \mathbb{R}$, mostre que a função constante $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma função mensurável.

Exercício 22. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e defina-se
$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$
a **parte positiva** e **negativa** de f, respectivamente. Mostre que f é mensurável sse f^+ e f^- são mensuráveis. (Dica: $f^+ = f \cdot \chi_E$ onde $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$)

Exercício 23. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável então $|f|$ também é mensurável.

Exercício 24. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Dado $a \in \mathbb{R}$, mostre que o **conjunto de nível** $\{x \in X : f(x) = a\}$ é mensurável.

Exercício 25. Considere um espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$ e um espaço métrico Y. Seja $f : X \to Y$ uma função mensurável. Prove que a colecção de conjuntos $\mathcal{C} = \left\{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\right\}$ é uma σ-álgebra.

De seguida veremos que limites de funções mensuráveis resultam em funções mensuráveis, ou seja, a passagem para o limite não destrói a mensurabilidade. Convém relembrar as seguintes definições. Dada uma sucessão $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, o **limite superior** de a_n é o número

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} a_n \,.$$

Ou seja, o maior dos pontos de acumulação da sucessão a_n. Analogamente, o **limite inferior** de a_n é o número

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} a_n \,.$$

Não é difícil verificar que $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\liminf_{n\to\infty}(-a_n)$. Note-se que uma sucessão a_n é convergente sse o seu limite superior e inferior coincidirem.

Considere-se agora uma sucessão de funções $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Para cada $x \in X$, tem-se que $f_n(x)$ é uma sucessão em $\overline{\mathbb{R}}$. Logo podemos definir as funções $\sup f_n$ e $\limsup f_n$ da seguinte maneira

$$(\sup f_n)(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x) \quad \text{e} \quad (\limsup f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \,.$$

Define-se de forma análoga as funções $\inf f_n$ e $\liminf f_n$. Diz-se que f_n **converge pontualmente** sse $\liminf f_n = \limsup f_n$.

Proposição 2.12. *Se $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma sucessão de funções mensuráveis então $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\liminf f_n$ e $\limsup f_n$ são funções mensuráveis.*

Demonstração. Não é difícil verificar a seguinte igualdade

$$\left\{x \in X : \sup_{n\geq k} f_n(x) > a\right\} = \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > a\} \,.$$

Como f_n é uma função mensurável, segue da Proposição 2.11 que $f_n^{-1}((a,\infty])$ é um conjunto mensurável para todo $a \in \mathbb{R}$. Logo, como a união numerável de conjuntos mensuráveis é mensurável, temos que $(\sup f_n)^{-1}((a,\infty])$ é mensurável. Segue outra vez da Proposição 2.11 que $\sup f_n$ é uma função mensurável. A demonstração das restantes deixa-se como exercício. $\square$

2.3 Integração de funções não negativas

Na secção anterior definimos medidas que tomam valores na semirecta estendida, ou seja, $[0,\infty]$. A introdução do infinito é necessária porque existem conjuntos de medida infinita, como é o caso da medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$. Portanto, no desenvolvimento da teoria de integração temos de ter algum cuidado com a aritmética em $[0,\infty]$. Assim, definimos para a adição

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad \forall\, a \in [0,\infty]\ ,$$

enquanto que para a multiplicação

$$a \times \infty = \infty \times a = \begin{cases} \infty & \text{se } a \in \,]0,\infty] \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

Com estas convenções estendemos as leis usuais ao conjunto $[0,\infty]$, com excepção da lei do corte para o infinito, como demonstra o exemplo: $\infty = 0 + \infty = 1 + \infty$ e no entanto $0 \neq 1$.

2.3.1 Integração de funções simples

Considere-se um espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Uma função $\varphi : X \to [0,\infty)$ é **simples** sse $\varphi(X) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $A_i = \varphi^{-1}(\{a_i\})$ é um conjunto mensurável para $i = 1, 2, \ldots, n$. Ou seja, uma função é simples se tiver um número finito de imagens e suas imagens inversas foram mensuráveis.

Note-se que os conjuntos A_i são disjuntos e sua união é X. Por outro lado pode-se escrever,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)\,,$$

onde χ_{A_i} são as funções características de A_i.

Exercício 26. Mostre toda a função simples é mensurável.

Definição 2.2. O **integral de Lebesgue de uma função simples** φ em $E \subseteq X$ relativo à medida μ é o número

$$\int_E \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E \cap A_i) \, .$$

Observação 2.13. Uma vez que é possível $\mu(A_i) = \infty$, usa-se a convenção $0 \times \infty = 0$ descrita no início desta secção.

Observação 2.14. Note-se que

$$\int_E \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \cdot \chi_E \, d\mu \, .$$

Exemplo 2.15. Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ onde m é a medida de Borel. Segundo a definição anterior, o integral de Lebesgue da função simples $\chi_{\mathbb{Q}}$ em $\mathbb{R}$ relativo a m é

$$\int_{\mathbb{Q}} \chi_{\mathbb{Q}} \, dm = 0 \times m(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) + 1 \times m(\mathbb{Q}) = 0 \times \infty + 1 \times 0 = 0 \, .$$

Note-se que $\chi_{\mathbb{Q}}$ não é integrável segundo Riemann.

Exercício 27. Sejam φ, ψ funções simples e $a > 0$. Mostre que $\varphi + \psi$ e $a\varphi$ são funções simples.

Exercício 28. Calcule o integral de Lebesgue em $A \subset [0, \infty)$ relativo a m das seguintes funções simples:

1. $\phi(x) = [x]$ e $A = [0, 10]$.
2. $\phi(x) = \left[x^2\right]$ e $A = [0, 2]$.

Nota: o símbolo $[x]$ denota a parte inteira do número x.

Exercício 29. Sejam φ, ψ duas funções simples em X. Mostre que se $\varphi \leq \psi$ então $\int_E \varphi \, d\mu \leq \int_E \psi \, d\mu$ para todo conjunto mensurável E.