Processos de Lévy

João Guerra

CEMAPRE and ISEG, UTL

October 15, 2014

Processos de Lévy

Definition

Seja $X = (X(t); t \geq 0)$ um processo estocástico. Diz-se que X tem incrementos independentes se para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada sucessão $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} < \infty$, as v.a. $(X(t_{j+1}) - X(t_j); 1 \leq j \leq n)$ são independentes e diz-se que X tem incrementos estacionários se $X(t_{j+1}) - X(t_j) \overset{d}{=} X(t_{j+1} - t_j) - X(0)$.

Definition

X é um processo de Lévy se
(1) $X(0) = 0$ (q.c.),
(2) X tem incrementos independentes e estacionários,
(3) X é estocasticamente contínuo, i.e. para qq. $\varepsilon > 0$ e qq. $t \geq 0$,

$$\lim_{s \to t} P(|X(s) - X(t)| > \varepsilon) = 0.$$

Poocessos de Lévy

- Condições (1) e (2) implicam que (3) é equivalente a $\lim_{s \searrow 0} P(|X(s)| > \varepsilon) = 0$.
- As trajectórias de X são as aplicações $t \to X(t)(\omega)$ de $\mathbb{R}^+$ to $\mathbb{R}^d$ para cada $\omega \in \Omega$.

Proposition

Se X é um processo de Lévy então $X(t)$ é infinitamente divisível para cada $t \geq 0$.

Proof: Para cada $n \in \mathbb{N}$, $X(t) = Y_1^{(n)}(t) + \cdots + Y_n^{(n)}(t)$, onde $Y_j^{(n)}(t) = X\left(\frac{jt}{n}\right) - X\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)$. Pela cond. (2), estes $Y_j^{(n)}(t)'s$ são v.a. iid e portanto $X(t)$ é infinitamente divisivel.

Theorem

Se X é um processo de Lévy, então

$$\phi_{X(t)}(u) = e^{t\eta(u)},$$

para cada $u \in \mathbb{R}^d$, onde η é o expoente característico (ou símbolo de Lévy) de $X(1)$.

Dem: Defina-se $\phi_u(t) = \phi_{X(t)}(u)$. Então, pela cond. (2), $\phi_u(t+s) = E\left[e^{i(u,X(t+s)-X(s)+X(s))}\right] = E\left[e^{i(u,X(t+s)-X(s))}\right] E\left[e^{i(u,X(s))}\right] = \phi_u(t)\phi_u(s)$.
Por outro lado, pela cond. (1), $\phi_u(0) = 1$. A aplicação $t \to \phi_u(t)$ é claramente contínua
A única função contínua a satisfazer estas condições é da forma $\phi_u(t) = e^{t\alpha(u)}$.
Mas $X(1)$ é também inf. divisivel e portanto $\phi_u(t) = e^{t\eta(u)}$ e $\alpha(u) = \eta(u)$.■

Fórmula de L-K para processos de Lévy

- Exercício: Prove que se X é estocasticamente contínuo, então a aplicação $t \to \phi_{X(t)}(u)$ é contínua para cada $u \in \mathbb{R}^d$ (Sugestão: ver Applebaum, pág. 43-44).
- Fórmula de L-K para processo de Lévy $X = (X(t); t \geq 0)$:

$$\phi_{X(t)}(u) = E\left[e^{i(u,X(t))}\right] = \exp\left\{t\left[i(b,u) - \frac{1}{2}(u,Au) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} \left[e^{i(u,x)} - 1 - i(u,x)\mathbf{1}_{|x|\leq 1}(x)\right]\nu(dx)\right]\right\}, \qquad (1)$$

$t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^d$. (b, A, ν) são as características de X (1).
- Exercício: Mostre que se X e Y são estocast. contínuos então $X + Y$ também é. (Sug.: use a desigualdade elementar $P(|A+B| > C) \leq P\left(|A| > \frac{C}{2}\right) + P\left(|B| > \frac{C}{2}\right)$ com A e B v.a.)

Mov. Browniano

- Um mov. Browniano em $\mathbb{R}^d$ é um processo de Lévy B para o qual
(1) $B(t) \sim N(0, tI)$.
(2) B tem trajectórias contínuas.
- De (1) obtemos

$$\phi_{B(t)}(u) = \exp\left\{-\frac{1}{2}t|u|^2\right\}.$$

- Principais propriedades (com $d = 1$):
- As trajectórias são localmente Hölder contínuas de grau α para qualquer α tal que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$:

$$|B(t)(\omega) - B(s)(\omega)| \leq K(T,\omega)|t-s|^{\alpha},$$

se $0 \leq s < t \leq T$.

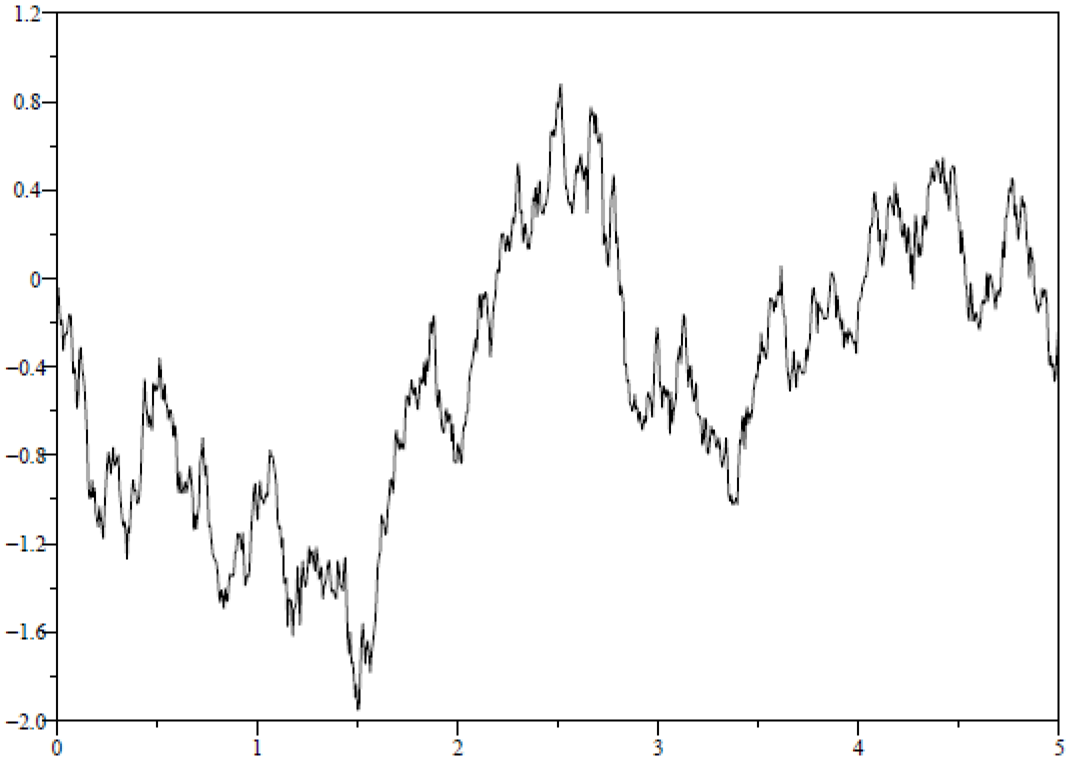
Mov. Browniano

- As trajectórias $t \to B(t)(\omega)$ não são diferenciáveis em nenhum ponto, quase certamente.
- Para qualquer sucessão $(t_n, n \in \mathbb{N})$ with $t_n \nearrow \infty$, temos

$$\liminf_{n\to\infty} B(t_n) = -\infty \quad \text{a.s.,}$$
$$\limsup_{n\to\infty} B(t_n) = +\infty \quad \text{a.s.}$$

Mov. Browniano

- Trajectória simulada de mov. Browniano:



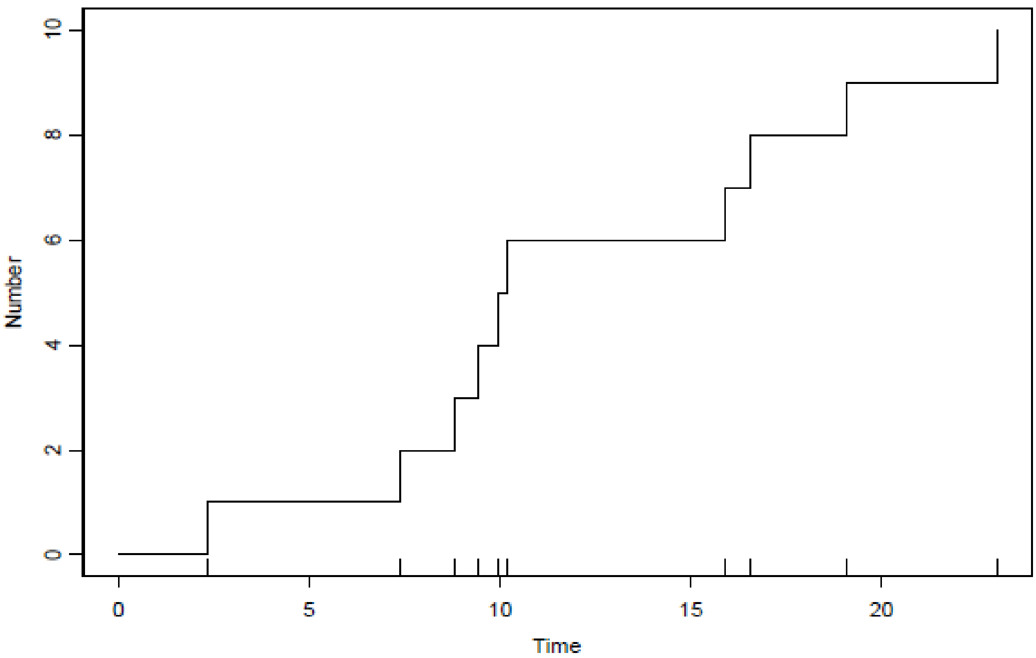
Mov. Browniano com drift

- Dada uma matriz simétrica A, definida positiva e de dim $d \times d$ matrix, seja σ a raíz quadrada de A (no sentido: $\sigma\sigma^T = A$) com σ uma matriz $d \times m$.Seja $b \in \mathbb{R}^d$ e B um mov. Browniano standard em $\mathbb{R}^m$.
- O processo
$$C(t) = bt + \sigma B(t) \tag{2}$$
é um processo de Lévy que satisfaz $C(t) \sim N(tb, tA)$.C é um processo Gaussiano.
- O processo C diz-se um mov. Browniano com deriva ("drift"). O expoente característico ou símbolo de Lévy de C é
$$\eta_C(u) = i(b, u) - \frac{1}{2}(u, Au).$$
- Um processo de Lévy tem trajectórias contínuas se e só se é da forma (2).

Processo de Poisson

- $N(t) \sim Po(\lambda t)$ é um processo com valores em $\mathbb{N}_0$:
$$P[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$
- Definam-se as v.a. não negativas $\{T(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ (tempos de espera), $T(0) = 0$,
$$T(n) = \inf\{t \geq 0 : N(t) = n\}.$$
As v.a. $T(n)$ têm uma distribuição gamma e os tempos entre chegadas $T(n) - T(n-1)$ são iid com distribuição exponencial (com média $1/\lambda$).
- Processo de Poisson compensado: $\widetilde{N} = \left(\widetilde{N}(t), t \geq 0\right)$ onde $\widetilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$. Nota: $E\left[\widetilde{N}(t)\right] = 0$ e $E\left[\left(\widetilde{N}(t)\right)^2\right] = \lambda t$.

Processo de Poisson



Processo de Poisson Composto

- Sucessão de v.a. $\{Z(n), n \in \mathbb{N}\}$ com valores em $\mathbb{R}^d$ e distribuição μ_Z. Seja N um processo de Poisson com intensidade λ e independente dos $Z(n)'$ s.
- Processo de Poisson composto:

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Z(n),$$

  e $Y(t) \sim \pi(\lambda t, \mu_Z)$.
- O expoente característico é

$$\eta_Y(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i(u,x)} - 1 \right) \lambda \mu_Z(dx).$$

- As trajectórias de Y são seccionalmente constantes com saltos em $T(n)$, mas as amplitudes dos saltos são aleatórias e a amplitude do salto em $T(n)$ pode ser qualquer valor no contradomínio de $Z(n)$.

Processo de Poisson Composto

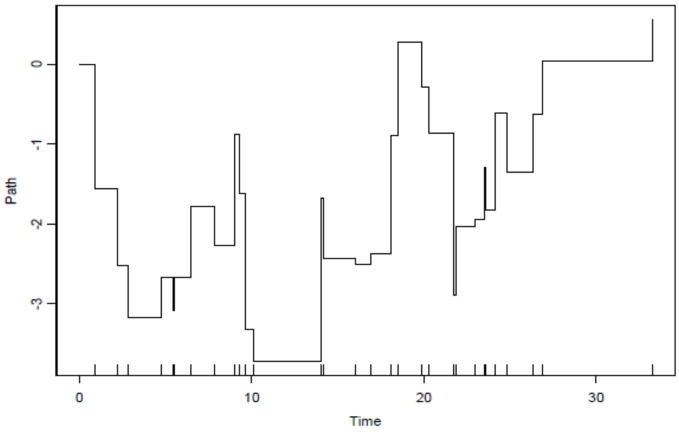


Figure 3. Simulation of a compound Poisson process with $N(0,1)$ summands($\lambda = 1$).

Processos entrelaçados

- Seja C um processo de Lévy Gaussiano e Y um processo de Poisson composto (independente de C). Defina

$$X(t) = C(t) + Y(t).$$

- X é um proc. de Lévy com expoente de Lévy característico

$$\eta_X(u) = i(m,u) - \frac{1}{2}(u, Au) + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i(u,x)} - 1 \right) \lambda \mu_Z(dx).$$

- Seja T_n o instante do salto n. Então temos (processo entrelaçado):

$$X(t) = \begin{cases} C(t) \text{ for } 0 \leq t < T_1, \\ X(T_1-) + Z_1 \text{ for } t = T_1, \\ X(T_1) + C(t) - C(T_1) \text{ for } T_1 \leq t < T_2, \\ X(T_2-) + Z_2 \text{ for } t = T_2, \\ etc... \end{cases}$$

Processos de Lévy estáveis

- Um processo de Lévy estável é um processo X com expoente característico ($\sigma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ e $\mu \in \mathbb{R}$) (cada $X(t)$ é v.a. estável):

Theorem

1. *quando* $\alpha = 2$,
$$\eta_X(u) = i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2;$$
2. *quando* $\alpha \neq 1, 2$
$$\eta_X(u) = i\mu u - \sigma^\alpha |u|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sgn}(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]$$
3. *quando* $\alpha = 1$,
$$\eta_X(u) = i\mu u - \sigma |u| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(u) \log(|u|)\right]$$

Processos de Lévy estáveis

- Caso importante (processos de Lévy estáveis rotacionalmente invariantes):
$$\eta_X(u) = -\sigma^\alpha |u|^\alpha, \qquad 0 < \alpha \leq 2.$$
- Porque são importantes? são auto-semelhantes!
- $Y = (Y(t), t \geq 0)$ diz-se auto-semelhante com índice de Hurst $H > 0$ se $(Y(at), t \geq 0)$ e $\left(a^H Y(t), t \geq 0\right)$ têm as mesmas distribuições de dimensão finita para qualquer $a \geq 0$.
- Examinando as funções características, pode-se provar que um processo de Lévy estável rotacionalmente invariante é auto-semelhante com $H = 1/\alpha$.
- Pode-se provar que um processo de Lévy X é auto-semelhante se e só se cada $X(t)$ é estritamente estável.

Subordinadores

- Um subordinador é um processo de Lévy unidimensional que é crescente q.c.
- Subordinador$\approx$ modelo ateatório da evolução temporal. Se $T = (T(t), t \geq 0)$ é um subordinador então $T(t) \geq 0$ q.c. e $T(t_1) \leq T(t_2)$ q.c. se $t_1 \leq t_2$.

Theorem

Se T é um subordinador então o seu expoente característico tem a forma

$$\eta_T(u) = i(b, u) + \int_{(0,\infty)} \left(e^{iux} - 1\right) \lambda(dx), \tag{3}$$

onde $b \geq 0$, e a medida de Lévy λ satisfaz: $\lambda(-\infty, 0) = 0$ e $\int_{(0,\infty)} (x \wedge 1) \lambda(dx) < \infty$.
Reciprocamente, qualquer aplicação $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ da forma (3) é a expoente característica de um subordinador.

- (b, λ) dizem-se as características do subordinador T.

Subordinadores

- Para cada $t \geq 0$, a aplicação $u \to E\left[e^{iuT(t)}\right]$ pode ser analiticamente continuada para a região $\{iu, u > 0\}$ e obtemos (transformada de Laplace da distribuição):

$$E\left[e^{-uT(t)}\right] = e^{-t\psi(u)},$$

onde

$$\psi(u) = -\eta(iu) = bu + \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-ux}\right) \lambda(dx). \tag{4}$$

- ψ diz-se o expoente de Laplace da distribuição.

Subordinadores - Poisson

- Processos de Poisson são subordinadores
- Processos de Poisson compostos são subordinadores se e só se as $Z(n)' s$ são v.a. positivas.

Subordinadores estáveis

- Pode-se provar (usando o cálculo integral usual) que (se $0 < \alpha < 1$ e $u \geq 0$)
$$u^{\alpha} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-ux}\right) \frac{dx}{x^{1+\alpha}}.$$
- Por (4) e considerando as características de proc. de Lévy estáveis, temos que existe um subordinador α-estável com expoente de Laplace $\psi(u) = u^{\alpha}$ e as características de T são $(0, \lambda)$ com $\lambda(dx) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$.
- Quando contínuamos analiticamente este expoente para obter o expoente caract. de Lévy, obtemos que $\mu = 0$, $\beta = 1$ e $\sigma^{\alpha} = \cos(\alpha\pi/2)$.
- Exercício: Mostre que existe um subordinador α-estável com expoente de Laplace $\psi(u) = u^{\alpha}$ e as caracterist. de T são $(0, \lambda)$ com $\lambda(dx) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$.

Subordinador de Lévy

- O subordinador $\left(\frac{1}{2}\right)$-estável tem densidade da pela distribuição de Lévy (com $\mu = 0$ e $\sigma = \frac{t^2}{2}$):

$$f_{T(t)}(s) = \left(\frac{t}{2\sqrt{\pi}}\right) s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-t^2}{4s}\right).$$

- É possível mostrar que (embora não seja imediato)

$$E\left[e^{-uT(t)}\right] = \int_0^\infty e^{-us} f_{T(t)}(s)\, ds = e^{-tu^{\frac{1}{2}}}.$$

- Este subordinador pode ser representado por um tempo de chegada ("hitting time") do mov. Brown.:

$$T(t) = \inf\left\{s > 0 : B(s) = \frac{t}{\sqrt{2}}\right\}. \qquad (5)$$

Subordinador Gaussiano inverso

- Podemos generalizar o subordinador de Lévy substituindo o mov. Brown. no tempo de chegada por um proc. Gaussiano: $C(t) = B(t) + \mu t$ e o subordinador Gaussiano inverso é

$$T_\delta(t) = \inf\{s > 0 : C(s) = \delta t\}$$

onde $\delta > 0$.

- Nota: $t \to T_\delta(t)$ é a inversa generalizada de um proc. Gaussiano, no sentido em que o proc. Gaussiano descreve o mov. Brown. num instante fixo e o inverso descreve a distribuição do tempo que um Browniano com drift leva a atingir um nível fixo.

Subordinador Gaussiano inverso

- Usando a teoria de martingalas, é possivel mostrar que se $t, u > 0$, então

$$E\left[e^{-uT_\delta(t)}\right] = \exp\left(-t\delta\sqrt{2u+\mu^2}-\mu\right)$$

e $T(t)$ tem densidade

$$f_{T_\delta(t)}(s) = \frac{\delta t}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta t\mu} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(t^2\delta^2 s^{-1}+\mu^2 s\right)\right],$$

para $s, t \geq 0$.

- Em geral, uma v.a. com densidade $f_{T_\delta(1)}$ diz-se uma Gaussiana inversa e é representada por $IG(\delta, \mu)$

Subordinador Gama

- Seja $T(t)$ um processo Gama com parâmetros $a, b > 0$ tal que $T(t)$ tem densidade

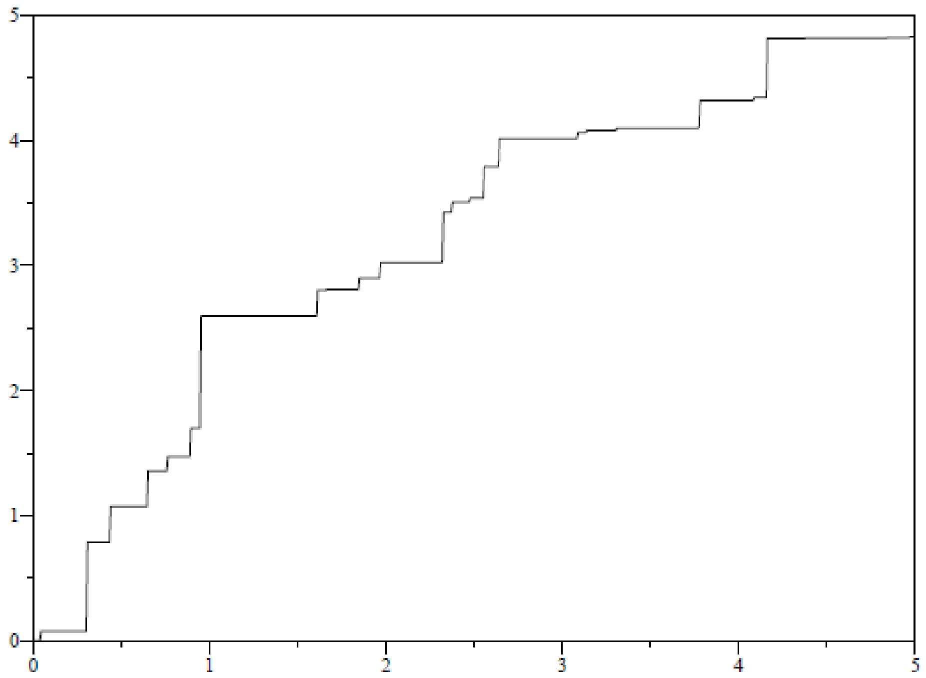
$$f_{T(t)}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx}, \quad x \geq 0.$$

- Pode-se mostrar que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ux} f_{T(t)}(x)\,dx &= \left(1+\frac{u}{b}\right)^{-at} = \exp\left(-ta\log\left(1+\frac{u}{b}\right)\right)\\ &= \exp\left(-t\int_0^\infty \left(1-e^{-ux}\right) ax^{-1}e^{-bx}dx\right).\end{aligned}$$

- Portanto, por (4), $T(t)$ é um subordinador com $b = 0$ e $\lambda(dx) = ax^{-1}e^{-bx}dx$

Simulação de subordinador Gama



Transformações temporais

- Aplicação importante dos subordinadores: transformações temporais!
- Seja X um proc. de Lévy e T um subordinador independente de X. Seja

$$Z(t) = X(T(t)).$$

Theorem

Z é um processo de Lévy

Dem: ver Applebaum, pág. 56-58

Proposition

$$\eta_Z = -\psi_T \circ (-\eta_X).$$

-

Transformações temporais

Proof: Seja $p_{T(t)}$ a distribuição associada ao subordinador $T(t)$. Então

$$\begin{aligned}
E\left[e^{i\eta_{Z(t)}(u)}\right] &= E\left(e^{i(u,X(T(t)))}\right) \\
&= \int E\left(e^{i(u,X(T(s)))}\right) p_{T(t)}(ds) \\
&= \int E e^{s\eta_X(u)} p_{T(t)}(ds) \\
&= E\left[e^{-(-\eta_X(u))T(t)}\right] \\
&= e^{-t\psi_T(-\eta_X(u))}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Mov. Browniano e mov. (2 alfa)-estável

- Seja T um subordinador α-estável (com $0 < \alpha < 1$) e X um Browniano com covariância $A = 2I$, independente de T. Então

  $$\psi_T(s) = s^\alpha, \quad \eta_X(u) = -|u|^2$$

  e, pela proposição,

  $$\eta_Z(u) = -|u|^{2\alpha}$$

  Z é um processo 2α-estável.
- Se $d = 1$ e T é o subordinador de Lévy, então Z é o processo de Cauchy e cada $Z(t)$ tem uma distribuição de Cauchy simétrica com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.
- Além disso, por (5), o processo de Cauchy pode ser construído a partir de 2 Brownianos independentes.

O processo "variance-gamma"

- Seja $Z(t) = B(T(t))$, onde T é subordinador Gama e B é mov. Browniano. Então, o proc. de Lévy Z chama-se proc. "variance-gamma"
- substituimos a variância de B por v.a. Gama.
- Então:
$$\Phi_{Z(t)}(u) = E\left[e^{uiZ(t)}\right] = \left(1 + \frac{u^2}{2b}\right)^{-at},$$
onde a e b são os parâmetros do proc. Gama.
- Exercício: prove este resultado.

O processo "variance-gamma"

- Manipulando funções caracteristicas, pode-se mostrar que:
$$Z(t) = G(t) - L(t)$$
onde G e L são subordinadores gama independentes com parâmetros $\sqrt{2b}$ e a (diferença de "ganhos"e "perdas"independentes).
- Partindo desta representação, pode-se mostrar que $Z(t)$ tem a densidade de Lévy:
$$g_\nu(x) = \frac{a}{|x|^1}\left(e^{\sqrt{2b}x}\chi_{(-\infty,0)}(x) + e^{-\sqrt{2b}x}\chi_{(0,\infty)}(x)\right),$$
$$a > 0.$$

Modelo CGMY

- O modelo CGMY (Carr, Geman, Madan, Yor) é uma generalização do "variance -gamma", com densidade de Lévy:

$$g_{\nu}(x) = \frac{a}{|x|^{1+\alpha}} \left(e^{b_1 x} \chi_{(-\infty,0)}(x) + e^{-b_2 x} \chi_{(0,\infty)}(x) \right),$$
$$a > 0,\ 0 \leq \alpha < 2,\ \ b_1, b_2 \geq 0.$$

- Quando $b_1 = b_2 = 0$, obtemos processos de Lévy estáveis.
- A exponencial atenua efeitos dos saltos grandes.

Processo Gaussiano normal inverso (NIG)

- Seja $Z(t) = C(T(t)) + \mu t$ com $C(t) = B(t) + \beta t$ e T um subordinador Gaussiano inverso. Seja α tal que $\alpha^2 \geq \beta^2$. Então Z depende de 4 parâmetros e tem função característica ($\delta > 0$):

$$\Phi_{Z(t)}(\alpha, \beta, \delta, \mu)(u) = \exp\left[\delta t \left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} \right) + i\mu t u \right]$$

- $Z(t)$ tem densidade

$$f_{Z(t)}(x) = C(\alpha, \beta, \delta, \mu; t)\, q\left(\frac{x - \mu t}{\delta t} \right)^{-1} K_1\left(\delta t \alpha q\left(\frac{x - \mu t}{\delta t} \right) \right) e^{\beta x},$$

onde $q(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $C(\alpha, \beta, \delta, \mu; t) = \pi^{-1} \alpha e^{\delta t \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta \mu t}$ e K_1 é uma função de Bessel do 3^o tipo.

- Applebaum, D. (2004). Lévy Processes and Stochastic Caculus. Cambridge University Press. - (Section 1.3)
- Applebaum, D. (2005). Lectures on Lévy Processes, Stochastic Calculus and Financial Applications, Ovronnaz September 2005, Lecture 1 in http://www.applebaum.staff.shef.ac.uk/ovron1.pdf
- Cont, R. and P. Tankov (2003). Financial modelling with jump processes - (Sections 3.1-3.7, pages 67-95).