Na proposição que se segue, reunimos algumas propriedades importantes do integral de Lebesgue de funções simples.

Proposição 2.16. *[Propriedades do integral de Lebesgue de funções simples] Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e φ, ψ duas funções simples em X. Então:*

1. *Se $\varphi \leq \psi$ então $\int_E \varphi \, d\mu \leq \int_E \psi \, d\mu$.*
2. *Se $E_i \subset X$, $i = 1, 2, \ldots$ é uma sucessão de conjuntos disjuntos então*
$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \varphi \, d\mu \, .$$
3. *Qualquer que seja $a > 0$, $a\varphi$ é uma função simples e*
$$\int_E a\varphi \, d\mu = a \int_E \varphi \, d\mu \, .$$
4. *A soma $\varphi + \psi$ é uma função simples e*
$$\int_E \varphi + \psi \, d\mu = \int_E \varphi \, d\mu + \int_E \psi \, d\mu \, .$$

Demonstração.

1. Ver Exercício 29.
2. Segue directo da definição de integral de Lebesgue e da σ-aditividade da medida μ que
$$\begin{aligned}\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} \varphi \, d\mu &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} a_j \mu(E_i \cap A_j) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_i \cap A_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \varphi \, d\mu\end{aligned}$$
3. Se $\varphi = \sum c_i \chi_{A_i}$ então $a\varphi = \sum a c_i \chi_{A_i}$. Logo
$$\int_E a\varphi \, d\mu = \sum a c_i \mu(E \cap A_i) = a \sum c_i \mu(E \cap A_i) = a \int_E \varphi \, d\mu \, .$$
4. Se $\varphi = \sum c_i \chi_{A_i}$ e $\psi = \sum b_j \chi_{B_j}$ então
$$\varphi + \psi = \sum_{i,j} (c_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j} \, .$$

   Por outro lado,
$$\int_{A_i \cap B_j} \varphi + \psi \, d\mu = (c_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) = \int_{A_i \cap B_j} \varphi \, d\mu + \int_{A_i \cap B_j} \psi \, d\mu \, .$$

Logo, como $E = \bigcup_{i,j} A_i \cap B_j$ e $A_i \cap B_j$ são disjuntos, segue da segunda propriedade desta proposição que

$$\begin{aligned}
\int_E \varphi + \psi \, d\mu &= \int_{\bigcup_{i,j} A_i \cap B_j} \varphi + \psi \, d\mu \\
&= \sum_{i,j} \int_{A_i \cap B_j} \varphi + \psi \, d\mu \\
&= \sum_{i,j} \int_{A_i \cap B_j} \varphi \, d\mu + \sum_{i,j} \int_{A_i \cap B_j} \psi \, d\mu \\
&= \int_E \varphi \, d\mu + \int_E \psi \, d\mu
\end{aligned}$$

□

2.3.2 Integração de funções mensuráveis

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. De seguida definimos o integral de Lebesgue para funções mensuráveis **não negativas** usando o já conhecido integral de Lebesgue para funções simples.

Definição 2.3. O **integral de Lebesgue de uma função mensurável não negativa** $f : X \to [0, \infty]$ em $E \subseteq X$ relativo à medida μ é o número

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu : \varphi \leq f \text{ é uma função simples} \right\}$$

Note-se que o integral é sempre não negativo e pode tomar o valor ∞.

Quando f é uma função simples, obtemos duas definições de integral de Lebesgue para funções simples. No entanto, segue da primeira propriedade da Proposição 2.16 que o supremo é atingido quando $\varphi = f$. Logo as duas definições são equivalentes quando f é simples.

Proposição 2.17. *[Propriedades do Integral de Lebesgue] Sejam $f, g : X \to [0, \infty]$ duas funções mensuráveis não negativas. Então*

1. *Se $f \leq g$ então $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.*
2. *Se $A \subset B$ então $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$.*
3. *Se $c \in [0, \infty)$ então $\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu$.*
4. *Se $f = 0$ então $\int_E f \, d\mu = 0$.*
5. *Se $\mu(E) = 0$ então $\int_E f \, d\mu = 0$.*
6. *$\int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E f \, d\mu$.*

Demonstração. Deixa-se como exercício. □

A proposição que se segue é bastante útil, porque permite generalizar para funções mensuráveis resultados que se conhecem para funções simples.

Proposição 2.18. *Seja $f : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Então existe uma sucessão φ_n, $n = 1, 2, \ldots$ de funções simples definidas em X tal que $\varphi_n \nearrow f$. Ou seja $\varphi_1 \le \varphi_2 \le \varphi_3 \le \cdots$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x),\ \forall x \in X\,.$$

Demonstração. Para cada $n \ge 1$ define-se

$$E_{n,k} = \left\{x \in X : \frac{k-1}{2^n} \le f(x) \le \frac{k}{2^n}\right\} \quad \text{e} \quad F_n = \{x \in X : f(x) \ge n\}\,.$$

Como f é mensurável segue que $E_{n,k}$ e F_n são conjuntos mensuráveis. Seja

$$\varphi_n = n\chi_{F_n} + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\chi_{E_{n,k}}\,.$$

É fácil verificar φ_n é uma sucessão crescente de funções simples e que converge pontualmente para f. □

Exercício 30. Sejam $f, g : X \to [0, \infty]$ duas funções mensuráveis. Mostre que $f + g$ e $f \cdot g$ são funções mensuráveis de $X \to [0, \infty]$. (Dica: Use as Proposições 2.12 e 2.18).

De seguida, apresentamos três resultados fundamentais que permitem efectuar as usuais trocas de limites com integrais para funções mensuráveis não negativas.

Teorema 2.19 (da convergência monótona)**.** *Seja $f_n : X \to [0, \infty]$ uma sucessão de funções mensuráveis não negativas tal que $f_n \nearrow f$, ou seja, $f_1 \le f_2 \le \cdots$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Então f é mensurável e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu\,.$$

Demonstração. Como $f_1 \le f_2 \le \cdots$ então $\int_X f_1\, d\mu \le \int_X f_2\, d\mu \le \cdots$ pela Proposição 2.17. Logo, existe um $\alpha \in [0, \infty]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \alpha\,.$$

Pela Proposição 2.12, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ é mensurável. Portanto, resta provar que

$$\alpha = \int_X f\, d\mu\,.$$

- ($\alpha \leq \int_X f\, d\mu$): Como $f_n \leq f$ temos que $\int_X f_n\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Logo $\alpha \leq \int_X f\, d\mu$.
- ($\alpha \geq \int_X f\, d\mu$): A prova desta desigualdade é um pouco mais elaborada. Vamos minorar o integral $\int_X f_n$ da seguinte maneira. Seja φ uma função simples tal que $\varphi \leq f$. Dado $0 < c < 1$ define-se
$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq c\varphi(x)\}\ .$$
Note-se que $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ (porque $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$) e $\bigcup_n E_n = X$ (porque $f > c\varphi$ para todo $c \in]0,1[$ e $f_n \nearrow f$, logo para todo $x \in X$ existe um $n \geq 1$ tal que $f_n(x) \geq c\varphi(x)$). Então
$$\int_X f_n\, d\mu \geq \int_{E_n} f_n\, d\mu \geq c \int_{E_n} \varphi\, d\mu\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$
Tomando $n \to \infty$ na desigualdade anterior obtém-se
$$\alpha \geq c \int_X \varphi\, d\mu\,.$$
Como c e $\varphi \leq f$ são arbitrários, segue da definição do integral de Lebesgue que
$$\alpha \geq \sup \left\{ \int_X \varphi\, d\mu : \varphi \leq f \right\} = \int_X f\, d\mu\,.$$

□

Exemplo 2.20. Tome-se $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. É claro que $\int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = 1$ para todo $n \geq 1$ e $\lim f_n = 0$. Logo $\int_{\mathbb{R}} (\lim f_n)\, dm \neq \lim \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm$.

Teorema 2.21 (conhecido por Lema de Fatou)**.** *Seja $f_n : X \to [0, \infty]$ uma sucessão de funções mensuráveis. Então*
$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu\,.$$

Demonstração. Seja $g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$. Então $g_n \leq f_n$ e
$$\int_X g_n\, d\mu \leq \int_X f_n\, d\mu\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$
Por outro lado $g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \cdots$ onde cada g_n é mensurável e $\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf f_n$ por definição de limite inferior. Logo, o Teorema da convergência monótona implica que
$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu\,.$$

Tomando $n \to \infty$ na desigualdade anterior obtém-se

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \,.$$

$\square$

Teorema 2.22. *Sejam $f_n : X \to [0,\infty]$, $n = 1, 2, \ldots$ funções mensuráveis e*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \forall x \in X \,.$$

Então

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \,.$$

Demonstração. Exercício. $\square$

Exercício 31. Demonstre o Teorema 2.22. (Dica: Considere em primeiro lugar uma soma finita e use a Proposição 2.18 e o Teorema da convergência monótona.)

Teorema 2.23. *Considere um espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e seja $f : X \to [0,\infty]$ uma função mensurável. Então a função $\nu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ definida por*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \,, \quad E \in \mathcal{F}$$

é uma medida em $(X, \mathcal{F})$. Adicionalmente, se $g : X \to [0,\infty]$ é uma função mensurável então

$$\int_X g \, d\nu = \int_X g \cdot f \, d\mu \,. \tag{2.1}$$

Demonstração. A demonstração de que a função ν é uma medida deixa-se como exercício. Façamos a demonstração da fórmula (2.1).

- A fórmula é válida quando $g = \chi_E$. De facto

$$\int_X \chi_E \, d\nu = \nu(E) = \int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E \cdot f \, d\mu \,.$$

- A fórmula é válida para qualquer função simples, ou seja, $g = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ com E_i disjuntos. De facto,

$$\begin{aligned}
\int_X \sum_i c_i \chi_{E_i} \, d\nu &= \sum_i c_i \int_X \chi_{E_i} \, d\nu \\
&= \sum_i c_i \int_X \chi_{E_i} \cdot f \, d\mu \\
&= \int_X \Big(\sum_i c_i \chi_{E_i}\Big) \cdot f \, d\mu
\end{aligned}$$

- A fórmula é válida para qualquer g mensurável. De facto, segundo a Proposição 2.18 existe uma sucessão de funções simples $\varphi_n \nearrow g$. Aplicando o teorema da convergência monótona tem-se

$$\int_X g\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \cdot f\, d\mu = \int_X g \cdot f\, d\mu$$

$\square$

Exercício 32. Demonstre a primeira parte do Teorema 2.23, ou seja, que a função $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ definida por

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu\,, \quad E \in \mathcal{F}$$

é uma medida. (Dica: Use a propriedade (6) da Proposição 2.17 e o Teorema 2.22 para mostrar a σ-aditividade.)

Observação 2.24. O teorema anterior estabelece que dada uma função mensurável, o integral de Lebesgue de uma união finita ou infinita numerável de conjuntos é igual à soma dos integrais relativos a cada conjunto.

Observação 2.25. No contexto do teorema anterior podemos escrever formalmente $d\nu = f\, d\mu$.

Exemplo 2.26. Seja $(X, \mathcal{P}(X), \delta_a)$ o espaço de medida onde δ_a é medida de massa unitária concentrada em $a \in X$. Dada uma função mensurável $f : X \to [0, \infty]$ iremos calcular o integral de Lebesgue de f. Atendendo ao Teorema 2.23 vem que

$$\int_X f\, d\delta_a = \int_{\{a\}} f\, d\delta_a + \int_{X\setminus\{a\}} f\, d\delta_a\,.$$

Uma vez que $\delta_a(X \setminus \{a\}) = 0$ tem-se que o segundo integral é zero. Logo

$$\int_X f\, d\delta_a = \int_{\{a\}} f\, d\delta_a = \int_X \chi_{\{a\}} f\, d\delta_a\,.$$

Mas $\chi_{\{a\}} f = f(a)\chi_{\{a\}}$ é uma função simples. Logo,

$$\int_X f\, d\delta_a = f(a) \times \delta_a(\{a\}) = f(a)\,.$$

Exercício 33. Considere o espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ onde μ é a medida de contagem. Seja $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ um subconjunto de X e $h : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Mostre que

1. $\chi_A \cdot h$ é uma função simples, onde χ_A é a função característica de A.
2. Calcule $\int_A h\, d\mu$.