2.4 Integração de funções complexas e espaço $\mathcal{L}^1(\mu)$

Seja μ uma medida no espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$. A teoria de integração para funções complexas é uma generalização imediata da teoria de integração de funções não negativas.

Definição 2.4. Define-se $\mathcal{L}^1(\mu)$ o conjunto de todas as funções complexas mensuráveis $f : X \to \mathbb{C}$ tais que

$$\int_X |f| < \infty \, .$$

Observação 2.27. Segue da Proposição 2.7 que $|f| : X \to [0, \infty[$ é uma função mensurável. Logo, faz sentido $\int_X |f|$.

Uma função $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ diz-se uma **função integrável** em X no sentido de Lebesgue, relativamente à medida μ. Neste caso, tomando $f = u + iv$, onde $u, v : X \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, define-se o **integral de Lebesgue da função complexa** f em E, relativo à medida μ como sendo o número

$$\int_E f \, d\mu = \int_E u^+ \, d\mu - \int_E u^- \, d\mu + i \int_E v^+ \, d\mu - i \int_E v^- \, d\mu$$

onde u^+, v^+ e u^-, v^- são a parte positiva e negativa de u, v respectivamente. Note-se que f é integrável em E sse $\int_E u^{\pm} \, d\mu$ e $\int_E v^{\pm} \, d\mu$ são finitos.

Teorema 2.28 (Propriedades)**.** *Sejam $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então*

1. $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
2. $\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu$.
3. $\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$.

Demonstração. Deixa-se como exercício. □

Observação 2.29. $\mathcal{L}^1(\mu)$ é um espaço linear.

Exemplo 2.30. Tome-se o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ onde μ é a medida de contagem. Considere-se o Boreliano $E = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função mensurável $g(x) = x$. Então, pela definição de integral de Lebesgue

$$\begin{aligned} \int_E g \, d\mu &= \int_E g^+ \, d\mu - \int_E g^- \, d\mu \\ &= \int_X \chi_E \cdot g^+ \, d\mu - \int_X \chi_E \cdot g^- \, d\mu \, . \end{aligned}$$

Note-se que $\chi_E \cdot g^+$ é uma função simples, de facto

$$\chi_E \cdot g^+ = g^+(-2)\chi_{\{-2\}} + g^+(-1)\chi_{\{-1\}} + g^+(1)\chi_{\{1\}} + g^+(2)\chi_{\{2\}}\,.$$

Logo,

$$\int_X \chi_E \cdot g^+ \, d\mu = g^+(1)\mu(\{1\}) + g^+(2)\mu(\{2\}) = 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3\,.$$

De maneira análoga tem-se $\int_X \chi_E \cdot g^- \, d\mu = 3$. Logo, $\int_E g \, d\mu = 0$.

Como já mencionado anteriormente, do ponto de vista da teoria da medida e integração, os conjuntos de medida nula são desprezáveis. De facto, se $f = g$ excepto num conjunto de medida nula N então

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu\,.$$

Portanto, diz-se que uma função f satisfaz a propriedade (P) **quase certamente (q.c.)** em E se f satisfizer essa propriedade para todos os pontos em E à excepção de um conjunto de medida nula.

Teorema 2.31. *Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Então*

1. *Se $f : X \to [0, \infty]$ é mensurável e $\int_E f \, d\mu = 0$ para algum $E \in \mathcal{F}$ então $f = 0$ q.c. em E.*
2. *Se $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e $\int_E f \, d\mu = 0$ para todo $E \in \mathcal{F}$ então $f = 0$ q.c. em X.*

Demonstração.

1. Tome-se o conjunto mensurável $E_n = \{x \in E : f(x) \geq 1/n\}$. Então $0 = \int_E f \, d\mu \geq \int_{E_n} f \, d\mu \geq \int_{E_n} 1/n \, d\mu = \mu(E_n)/n$. Logo $\mu(E_n) = 0$. Uma vez que $\mu(\bigcup_n E_n) = 0$, segue que $f > 0$ para um conjunto de medida nula, ou seja, $f = 0$ q.c.
2. Deixa-se como exercício.

$\square$

2.5 Integral de Lebesgue-Stieltjes

Numa secção anterior, construiriam-se medidas de Lebesgue-Stieltjes em $\mathbb{R}$, isto é, dada uma função de distribuição F existe um espaço de medida completo $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, m_F)$ onde m_F é designada por medida de Lebesgue-Stieltjes. Tome-se uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mensurável relativamente à σ-álgebra $\mathcal{M}_F$. Ao integral de g relativamente à medida m_F designa-se por **integral de Lebesgue-Stieltjes** e é usual escrever-se

$$\int g \, dm_F = \int g \, dF\,.$$

2.6 Teorema da convergência dominada

No contexto das funções mensuráveis não negativas o teorema da convergência monótona garante que para uma sucessão de funções que convergem monotonamente para uma função então o integral da função limite é igual ao limite dos integrais das respectivas funções.

Nesta secção enunciamos um teorema semelhante ao da convergência monótona. O teorema que se segue, estabelece um conjunto de condições suficientes para se proceder à troca de limites com integral quando as funções a integrar tomam valores complexos.

Teorema 2.32 (da convergência dominada)**.** *Seja* $f_n : X \to \mathbb{C}$ *uma sucessão de funções mensuráveis e* $g : X \to [0, \infty)$ *uma função integrável, isto é* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$*, tal que para todo* $n \geq 1$ *se tem* $|f_n| \leq g$*.*

Se $f = \lim_n f_n$ *então* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \, .$$

Demonstração. Tomando parte real e imaginária, pode-se supor que f_n e f são funções reais. Logo $-g \leq f_n \leq g$. Como $f = \lim_n f_n$ temos que f é mensurável e $-g \leq f \leq g$. Aplicando o lema de Fatou à sucessão $f_n + g \geq 0$ obtém-se

$$\int_X f + g \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n + g \, d\mu \, .$$

Segue do facto de g ser integrável que

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \, .$$

Aplicando mais uma vez o lema de Fatou, mas agora à sucessão $g - f_n \geq 0$, obtém-se

$$\int_X g - f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X g - f_n \, d\mu \, ,$$

ou escrito de forma equivalente

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \, .$$

□

Exercício 34. Considere-se o espaço mensurável $(X, \mathcal{P}(X))$. Seja $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ um subconjunto numerável de X e $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ a seguinte função

$$\mu(E) = \sum_{x_i \in E} \alpha_i \, ,$$

onde α_i, $i = 1, 2, \ldots$ são números reais não negativos. Mostre que

1. μ é uma medida, designada por **medida discreta**.
2. $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i}$ onde δ_{x_i} é a medida de Dirac.
3. Dada uma função mensurável $f : X \to [0, \infty]$,

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{x_i \in E} f(x_i)\alpha_i\,.$$

2.7 Relação com integral de Riemann

Nesta secção relacionamos o integral de Riemann com o recém definido integral de Lebesgue. Relembremos o conceito de integral de Riemann. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função real limitada onde $a < b$. Uma **partição** do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ onde

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b\,.$$

Dada uma partição P pode-se definir as **somas inferior e superior** de Riemann da função f relativas à partição P,

$$\underline{\Sigma}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(a_i - a_{i-1}) \quad \text{e} \quad \overline{\Sigma}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(a_i - a_{i-1})\,,$$

onde $m_i = \inf \{f(x) : a_{i-1} < x < a_i\}$ e $M_i = \sup \{f(x) : a_{i-1} < x < a_i\}$. Uma vez que f é limitada estes números existem. Por fim define-se

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \left\{\overline{\Sigma}(f, P) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\right\}\,,$$
$$\underline{\int_a^b} f = \sup \{\underline{\Sigma}(f, P) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\}\,.$$

Finalmente, diz-se que f é **integrável à Riemann** sse $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ e é comum denotar-se este número por

$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

O seguinte teorema permite relacionar o integral de Riemann com o integral de Lebesgue.

Teorema 2.33. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se f for integrável à Riemann então f é integrável relativamente à medida de Lebesgue e os integrais coincidem,*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f\, dm\,.$$

Demonstração. Ver demonstração em [1]. $\square$

Exemplo 2.34. 1. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então é integrável à Riemann. Para além disso, se tiver uma **primitiva**, isto é, existir uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$ então

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

2. Há funções simples que não são integráveis à Riemann, como é o caso da função característica $\chi_{\mathbb{Q}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$. De facto, $\underline{\Sigma}(\chi_{\mathbb{Q}}, P) = 0$ e $\overline{\Sigma}(\chi_{\mathbb{Q}}, P) = 1$ para toda a partição P. Logo $\overline{\int_0^1} \chi_Q q \neq \underline{\int_0^1} \chi_{\mathbb{Q}}$.

Exemplo 2.35. Considere-se a medida de Borel m no espaço mensurável $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ e a seguinte sucessão de funções reais

$$f_n(x) = \frac{n \sin x}{1 + n^2 x^{1/2}} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

para $x \in [0, 1]$. É claro que $\lim_n f_n = 0$. Para concluir que $\lim_n \int_{[0,1]} f_n\, dm = 0$ basta, usando o teorema da convergência dominada, encontrar uma função integrável $g \geq 0$ tal que $|f_n| \leq g$. Majorando f_n obtém-se

$$\left| \frac{n \sin x}{1 + n^2 x^{1/2}} \right| \leq \frac{n}{1 + n^2 x^{1/2}} \leq \frac{1}{n x^{1/2}} \leq \frac{1}{x^{1/2}}\,.$$

Por outro lado, $\frac{1}{x^{1/2}}$ é integrável à Riemann no intervalo $[0, 1]$. Logo $|f_n|$ é majorada por uma função integrável (no sentido de Lebesgue). Segue do teorema da convergência dominada que $\lim_n \int_{[0,1]} f_n\, dm = 0$.

Exercício 35. Use o teorema da convergência dominada para calcular

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1 + n x^3}\, dx\,.$$

2.8 Continuidade absoluta e Teorema de Radon-Nikodym

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Como foi visto, a função $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ definida por

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu\,,$$

é uma medida no espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$. A medida ν tem a seguinte propriedade: se $\mu(E) = 0$ então $\nu(E) = 0$. Esta propriedade é de fundamental importância para teoria de probabilidades como veremos adiante.

Definição 2.5. Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e μ, λ duas medidas definidas neste espaço. Diz-se que λ é **absolutamente contínua relativamente a** μ e escreve-se $\lambda \ll \mu$ sse para todo $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) = 0$ então $\lambda(E) = 0$.

A definição anterior diz que $\lambda \ll \mu$ sse todos os conjuntos de medida nula de μ forem também conjuntos de medida nula para λ. No entanto, λ pode ter mais conjuntos de medida nula que μ.

Acabámos de ver que todas a medidas ν construídas através do integral $\int_E f\, d\mu$ são absolutamente contínuas relativamente a μ. A questão que se coloca é: será que todas a medidas absolutamente contínuas relativamente a μ podem ser obtidas dessa maneira? A resposta a esta questão é dada pelo teorema de Radon-Nikodym.

Teorema 2.36 (de Radon-Nikodym)**.** *Sejam λ e μ duas medidas finitas definidas em $(X, \mathcal{F})$ tal que $\lambda \ll \mu$. Então existe uma única função $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que*

$$\lambda(E) = \int_E h\, d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{F}\,.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1]. □

A função h designa-se por **derivada no sentido de Radon-Nikodym de** λ e escreve-se formalmente

$$h = \frac{d\lambda}{d\mu}\,.$$

Observação 2.37. A unicidade de h no teorema de Radon-Nikodym deve ser entendida no seguinte sentido: se f é outra função em $\mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $\lambda(E) = \int_E f\, d\mu$ então $f = h$ q.c.

Observação 2.38. O teorema de Radon-Nikodym é válido para o caso mais geral de λ e μ serem duas medidas σ-finitas, como é o caso da medida de Lebesgue. Uma medida μ de $(X, \mathcal{F})$ diz-se **σ-finita** sse existirem conjuntos mensuráveis $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Definição 2.6. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $A \in \mathcal{F}$. Diz-se que μ está **concentrada em** A sse

$$\mu(E) = \mu(E \cap A), \quad \forall E \in \mathcal{F}\,.$$

Definição 2.7. Duas medidas μ e λ definidas em $(X, \mathcal{F})$ dizem-se **mutuamente singulares** e escreve-se $\mu \perp \lambda$ sse existem dois conjuntos disjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ tal que μ está concentrada em A e λ está concentrada em B.