1.3 Conjuntos de medida nula

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Um subconjunto $A \subset X$ é um conjunto de **medida nula** se existir $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset B$ e $\mu(B) = 0$. Do ponto de vista da teoria da medida, os conjuntos de medida nula são desprezáveis. No entanto, é conveniente que todos os conjuntos de medida nula sejam também conjuntos mensuráveis, isto é, elementos de $\mathcal{F}$. Um espaço de medida com esta propriedade diz-se **completo**.

Proposição 1.5. *A união numerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Deixa-se como exercício. □

A **diferença simétrica** entre dois conjuntos A e B é o conjunto

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

Se $A \triangle B$ é um conjunto de medida nula então A e B são **μ-equivalentes**. Se adicionalmente, A e B são mensuráveis então $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B)$ (porquê?).

Exercício 11. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $A, B \subset X$ dois conjuntos. Mostre que são equivalentes

1. A é μ-equivalente a B.
2. existe um conjunto $N \subset X$ de medida nula tal que $A \cap N^c = B \cap N^c$.
3. existe $C \in \mathcal{F}$, $\mu(C) = 0$ tal que $B \setminus C \subset A \subset B \cup C$.

Seja $\overline{\mathcal{F}}$ a seguinte colecção de subconjuntos de X,

$$\overline{\mathcal{F}} = \{A \in \mathcal{P}(X) \colon A \text{ é } \mu\text{-equivalente a algum } B \in \mathcal{F}\}$$

e $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{F}} \to [0, \infty]$ a função definida por $\overline{\mu}(A) = \mu(B)$ para algum $B \in \mathcal{F}$ μ-equivalente a A. É claro que $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$ (porquê?).

Proposição 1.6. *$(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ é um espaço de medida completo.*

Demonstração. Em primeiro lugar verifica-se que $\overline{\mathcal{F}}$ é uma σ-álgebra. Demonstramos o terceiro axioma, deixando como exercício a verificação dos restantes axiomas.

Sejam $A_i \in \overline{\mathcal{F}}$, $i = 1, 2, \ldots$. Por definição existem $B_i \in \mathcal{F}$ μ-equivalentes a A_i. Logo, pelo Exercício 11 existem $N_i \subset X$ conjuntos de medida nula tal que $A_i \cap N_i^c = B_i \cap N_i^c$. Segue que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \triangle \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\,.$$

Como $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra temos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$. Por outro lado, do Exercício 1.5 temos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ é um conjunto de medida nula. Logo $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ é μ-equivalente a $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$, ou seja, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \overline{\mathcal{F}}$.

De seguida, mostra-se que $\overline{\mu}$ é uma medida. É claro que $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Para mostrar a σ-aditividade, sejam $A_i \in \overline{\mathcal{F}}$, $i = 1, 2, \dots$ conjuntos disjuntos dois a dois. Como anteriormente, existem conjuntos $B_i \in \mathcal{F}$ μ-equivalentes a A_i tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ é μ-equivalente a $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Segue do ponto 3. do Exercício 11 que existem conjuntos $C_i \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(C_i) = 0$ e $B_i \setminus C_i \subset A_i$. Uma vez que $A_i \triangle (B_i \setminus C_i) \subset (A_i \triangle B_i) \cup C_i$ tem-se que A_i é μ-equivalente a $B_i \setminus C_i \in \mathcal{F}$. Além disso os conjuntos $B_i \setminus C_i \subset A_i$ são disjuntos dois a dois. Logo

$$\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \setminus C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i \setminus C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_i)\,.$$

Resta provar que $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ é completo, ou seja, se A é um conjunto de medida nula então $A \in \overline{\mathcal{F}}$. Mas por definição de conjunto de medida nula, existe um $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset B$ e $\mu(B) = 0$. Logo $A \triangle B$ é um conjunto de medida nula. Portanto A é μ-equivalente a B, isto é, $A \in \overline{\mathcal{F}}$. □

A σ-álgebra $\overline{\mathcal{F}}$ é designada por **μ-completação** da σ-álgebra $\mathcal{F}$.

1.4 Medidas de Lebesgue-Stieltjes

Nesta secção iremos estudar uma classe especial de medidas no espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ onde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a σ-álgebra de Borel, ou seja, a menor σ-álgebra de partes de $\mathbb{R}$ que contém os abertos de $\mathbb{R}$. Estas medidas desempenham um papel essencial em teoria de probabilidades, como veremos mais à frente.

Definição 1.3. Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função de distribuição** sse

1. F é não decrescente, isto é, se $x < y$ então $F(x) \leq F(y)$.
2. F é contínua à direita, $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$.

Uma medida μ definida em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ diz-se **localmente finita** sse $\mu([a, b]) < \infty$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$. Se $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ então a medida diz-se **finita**.

Proposição 1.7. *Seja μ uma medida em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ localmente finita e dado $a \in \mathbb{R}$ seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$F(x) = \begin{cases} \mu(]a, x]) & \text{se } x \geq a \\ -\mu(]x, a]) & \text{se } x < a \end{cases}$$

Então F é uma função de distribuição.

Demonstração. De facto, F é não decrescente uma vez que para $x < a \leq y$ (os restantes casos são deixados como exercício) tem-se

$$F(y) - F(x) = \mu(]a, y]) + \mu(]x, a]) = \mu(]x, y]) \geq 0\,.$$

Quando à continuidade à direita para $x_0 \geq a$ (o caso $x_0 < a$ é deixado como exercício), tome-se uma qualquer sucessão decrescente x_n e convergente para x_0. Pela continuidade superior da medida μ (ver Proposição 1.4) e do facto de $\mu(]a, x_n]) < \infty$ segue que

$$F(x_0) = \mu(]a, x_0]) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}]a, x_n]) = \lim_{n\to\infty} \mu(]a, x_n]) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)\,.$$

□

Vimos na proposição anterior que qualquer medida localmente finita define uma função de distribuição. Agora consideremos o problema inverso, ou seja, dada uma função de distribuição F será possível associar uma medida m_F? O seguinte teorema responde positivamente a esta questão.

Teorema 1.8. *Dada uma função de distribuição F existe uma medida m_F em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que*

$$m_F(]a, b]) = F(b) - F(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}\,.$$

A construção da medida m_F é reminiscente da construção da medida de Lesbegue em $\mathbb{R}$. A sua demonstração pode ser vista em [1].

Observação 1.9. Note-se que os intervalos considerados são abertos à esquerda e fechados à direita, garantindo assim que m_F é aditiva, isto é, $m_F(]a, b]) = m_F(]a, c]) + m_F(]c, b])$ para todo $a < c < b$ e por outro lado garante que m_F é contínua superiormente, ou seja, dada um sucessão decrescente $b_n \searrow b$ tem-se

$$\begin{aligned} m_F(\bigcap_{n=1}^{\infty}]a, b_n]) &= m_F(]a, b]) = F(b) - F(a) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(b_n) - F(a) = \lim_{n\to\infty} m_F(]a, b_n])\,. \end{aligned}$$

Observação 1.10. Note-se que nem sempre o conjunto unitário $\{a\}$ tem medida nula. De facto, usando a continuidade superior da medida m_F temos que

$$m_F(\{a\}) = m_F(\bigcap_{n=1}^{\infty}]a-1/n, a]) = \lim_{n\to\infty} m_F(]a-1/n, a]) = F(a) - F(a^-)\,.$$

Portanto, se a é um ponto de descontinuidade de F então $m_F(\{a\})$ é igual ao "salto" de F no ponto a.

A medida m_F designa-se por **medida de Borel-Stieltjes**. Denote-se por $\mathcal{M}_F$ a m_F-completação de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Então $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, m_F)$ é um espaço de medida completo e m_F designa-se por **medida de Lebesgue-Stieltjes**.

Exemplo 1.11. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função de distribuição definida por $F(x) = 1$ se $x \geq a$ e $F(x) = 0$ se $x < a$. A medida de Lebesgue-Stieltjes $m_F = \delta_a$ onde δ_a é a medida de Dirac, ou seja, para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ tem-se

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad a \in A, \\ 0 & \text{se} \quad a \notin A. \end{cases}$$

Não é difícil verificar que $\mathcal{M}_F = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. De facto, dado $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $a \in A$ (o caso contrário deixa-se como exercício) pode-se escrever $A = \{a\} \cup (A \setminus \{a\})$. Note-se que $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_F$. Por outro lado, $A \setminus \{a\} \subset]-\infty, a[\cup]a, \infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ onde $\delta_a(]-\infty, a[\cup]a, \infty[) = 0$. Logo $A \setminus \{a\}$ é um conjunto de medida nula e portanto A é m_F-equivalente a $\{a\}$. Como $\mathcal{M}_F$ é a m_F-completação de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tem-se $A \in \mathcal{M}_F$.

Em geral dada uma função de distribuição F constante por troços e com pontos de descontinuidade $\{a_1, \ldots, a_n\}$, a medida m_F é igual à soma

$$m_F = \sum_{i=1}^{n} \big[F(a_i) - F(a_i^-)\big]\big)\delta_{a_i}$$

e todo o subconjunto de $\mathbb{R}$ é Lebesgue-Stieltjes mensurável, ou seja, $\mathcal{M}_F = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.12. No caso em que a função de distribuição é $F(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ então $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, m_F)$ escreve-se apenas $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ e designa-se m por **medida de Lebesgue**. Quando restringida aos Borelianos designa-se por **medida de Borel**. A medida de Lebesgue satisfaz algumas propriedades adicionais, em particular:

1. Dado um conjunto E Lebesgue mensurável, ou seja $E \in \mathcal{M}$, então para qualquer $x \in \mathbb{R}$ o conjunto $x + E = \{x + y : y \in E\}$ é Lebesgue mensurável e $m(x + E) = m(E)$.
2. Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ então $m(I) = \text{Comp}(I)$.

Segundo o Teorema 1.8 tem-se que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. De facto é possível provar que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Na proposição que se segue, provamos que a segunda inclusão é de facto estrita. Ou seja, que existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ não mensuráveis no sentido de Lebesgue. Para provar a primeira inclusão veja-se [1].

Proposição 1.13. *Existe um conjunto $V \subset [0,1]$ denominado por* ***conjunto de Vitali*** *tal que V não é mensurável no sentido de Lebesgue, ou seja, $V \notin \mathcal{M}$.*

Demonstração. Define-se a seguinte relação de equivalência no intervalo $[0,1]$. Dois números $x, y \in [0,1]$ dizem-se equivalentes e escreve-se $x \sim y$ sse $y - x$ for um número racional. Esta relação de equivalência particiona $[0,1]$ em classes de equivalência disjuntas A_α do tipo $a_\alpha + \mathbb{Q}$ para algum $a_\alpha \in [0,1]$. É claro que existem um número não numerável de classes de equivalência. Seja $V \subset [0,1]$ o conjunto formado por um e um só elemento de cada classe de equivalência A_α (porque se pode fazer esta escolha?). Seja q_n uma enumeração do racionais em $[-1,1]$ e seja $V_n = q_n + V$ uma translação do conjunto V.

Os conjuntos V_n são disjuntos dois a dois. De facto, se $x \in V_n \cap V_m$ então $x = a_\alpha + q_n = a_\beta + q_m$ para algum $a_\alpha, a_\beta \in V$. Logo, $a_\alpha - a_\beta = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$ o que implica que $a_\alpha \sim a_\beta$. Como V contém um e um só elemento de cada classe A_α segue que $a_\alpha = a_\beta$, logo $n = m$.

Portanto, se V for mensurável então V_n também é mensurável e para além disso $m(V_n) = m(V)$ (porquê?). Por outro lado,

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subset [-1,2]\,.$$

Logo pela σ-aditividade e monotonia da medida m tem-se

$$1 = m([0,1]) \leq m(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(V_n) = m(V) + m(V) + \cdots \leq 3\,.$$

A desigualdade anterior é claramente impossível visto que se $m(V) = 0$ então $1 \leq 0 \leq 3$. Por outro lado, se $m(V) > 0$ então $1 \leq \infty \leq 3$. Logo V não é mensurável. $\square$

Exercício 12. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito ou numerável então A tem medida de Lebesgue nula.

Exercício 13. Seja F uma função de distribuição continua. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito ou numerável então $m_F(A) = 0$.

Exercício 14. Dê um exemplo de uma função de distribuição F tal que $m_F(\{1\}) = 1$.

Exercício 15. Considere a função,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

1. Prove que F é uma função de distribuição.
2. Seja μ a medida de Borel-Stieltjes associada a F. Calcule $\mu(]3,9])$.

Exercício 16. Considere a medida $\mu = 3\delta_2 + 2\delta_3$ em $\mathbb{R}$. Determine a função de distribuição F tal que $\mu = m_F$.

Exercício 17. Mostre que uma função de distribuição tem no máximo um conjunto numerável de pontos de descontinuidade.

2 Integração

2.1 Espaços métricos

Seja X um conjunto. Uma função $d : X \times X \to [0, \infty[$ é uma **distância** de X se satisfaz

1. $d(x, y) = 0$ sse $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

A terceira propriedade é conhecida por **desigualdade triangular**. O par (X, d) designa-se por **espaço métrico**. Para simplificar a exposição é conveniente chamar X um espaço métrico omitindo a distância d. Dado $r > 0$, o conjunto $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ designa-se por **bola aberta** de centro x e raio r.

Observação 2.1. Um espaço métrico é um caso particular de um espaço topológico onde a topologia é formada por uniões arbitrárias (podem ser não numeráveis) de bolas abertas.

Exemplo 2.2. Como exemplo, considere o espaço métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ onde

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

O espaço métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ é conhecido por **espaço Euclidiano** e d a **distância Euclidiana**.

Ao complementar dos conjuntos abertos designamos por **conjuntos fechados**, ou seja, se $A \subset X$ é aberto então A^c é fechado. Uma **vizinhança** de $x \in X$ é um qualquer conjunto $V \subset X$ tal que existe um aberto $A \subset V$ que contenha x.

Exemplo 2.3. Seja X um conjunto e d a seguinte função

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

É fácil verificar que d é uma distância. Ao espaço métrico (X, d) chamamos **espaço discreto** e d a **métrica discreta**.

Exemplo 2.4. A recta estendida $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ é um espaço métrico com a distância

$$d(x, y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|,$$

onde naturalmente se define $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$. Os abertos deste espaço métrico são uniões numeráveis de três tipos de intervalos: $]a, b[$, $[-\infty, a[$ e $]a, +\infty]$.

Sejam X e Y dois espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é **contínua** sse $f^{-1}(A)$ é aberto de X para qualquer aberto A de Y.

Exemplo 2.5. Seja $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ o espaço métrico definido no exemplo anterior. A função $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = \pm\infty \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua.

2.2 Funções mensuráveis

Definição 2.1. Sejam $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e Y um espaço métrico. Uma função $f : X \to Y$ é **mensurável** sse $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ para todo o aberto A de Y.

Exemplo 2.6. Seja $E \subset X$ e tome-se a **função característica** de E, $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

A função χ_E é mensurável sse E é mensurável. De facto, dado um aberto de $A \subset \mathbb{R}$ tem-se: se $0 \notin A$ e $1 \notin A$ então $\chi_E^{-1}(A) = \emptyset$; se $0 \in A$ e $1 \notin A$ então $\chi_E^{-1}(A) = E^c$; se $0 \notin A$ e $1 \in A$ então $\chi_E^{-1}(A) = E$; se $0 \in A$ e $1 \in A$ então $\chi_E^{-1}(A) = X$.

De seguida enunciaremos duas proposições que permitem estabelecer a mensurabilidade de uma grande classe de funções. Antes de continuar convém relembrar as propriedades da imagem inversa, isto é, que se $f : X \to Y$ é uma função e $A, B \subset Y$ então

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \text{e} \quad f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A).$$

Note-se que a primeira propriedade por ser estendida a uniões numeráveis usando indução.