**Proposição 2.39** (Propriedades de $\ll$ e $\perp$.). *Sejam $\mu, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ medidas no espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$. Então*

1. *se $\lambda_1 \perp \mu$ e $\lambda_2 \perp \mu$ então $(\lambda_1 + \lambda_2) \perp \mu$.*
2. *se $\lambda_1 \ll \mu$ e $\lambda_2 \ll \mu$ então $(\lambda_1 + \lambda_2) \ll \mu$.*
3. *se $\lambda_1 \ll \mu$ e $\lambda_2 \perp \mu$ então $\lambda_1 \perp \lambda_2$.*
4. *se $\lambda \ll \mu$ e $\lambda \perp \mu$ então $\lambda = 0$.*

*Demonstração.* Deixa-se como exercício. □

O resultado que se segue estabelece que qualquer medida finita pode ser decomposta numa parte absolutamente contínua e numa parte singular (com respeito à uma medida finita de referência).

**Teorema 2.40** (da decomposição de Lebesgue). *Sejam $\mu$ e $\lambda$ duas medidas finitas no espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$. Então existe um par de medidas $(\lambda_a, \lambda_s)$ definidas em $(X, \mathcal{F})$ tal que*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \textit{onde} \quad \lambda_a \ll \mu \quad \textit{e} \quad \lambda_s \perp \mu\,.$$

*Demonstração.* Ver demonstração em [1]. □

**Exercício 36.** Considere-se as seguinte medidas em $([0,1], \mathcal{B})$: $\mu_1 = \delta_0$, $\mu_2 = m$ e $\mu_3 = \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2}$. Para que $i \neq j$ se tem $\mu_i \ll \mu_j$? Determine a derivada no sentido de Radon-Nikodym em cada caso.

## 2.9 Medida imagem

Nesta secção introduzimos o conceito de medida imagem. Este conceito é fundamental no desenvolvimento da teoria da probabilidade.

**Teorema 2.41** (Medida imagem). *Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $(Y, \mathcal{B})$ um espaço mensurável onde $\mathcal{B}$ é a $\sigma$-álgebra de Borel do espaço $Y$. Dada uma função mensurável $f : X \to Y$ então a função $f_*\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ definida por*

$$f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}$$

*é uma medida em $(Y, \mathcal{B})$.*

*Demonstração.* Deixa-se como exercício. (Dica: use as propriedades da imagem inversa) □

A medida $f_*\mu$ do teorema anterior designa-se por **medida imagem de $\mu$ por $f$.**

**Teorema 2.42** (Mudança de variável)**.** *Nas condições do teorema anterior, uma função mensurável $g : Y \to \mathbb{R}$ é integrável relativamente à medida imagem $f_*\mu$ sse a função composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é integrável relativamente a $\mu$ e*

$$\int_B g\, d(f_*\mu) = \int_{f^{-1}(B)} g \circ f\, d\mu\,.$$

*Demonstração.* Deixa-se como exercício. (Dica: prove o teorema para funções simples, de seguida use o teorema da convergência monótona e prove para funções mensuráveis não negativas e, por fim, use a definição de integral de Lebesgue para funções mensuráveis.) □

## 2.10 Produto de medidas e Teorema de Fubini

Sejam $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ dois espaços de medida. Designamos por $X$ o produto cartesiano $X = X_1 \times X_2$ e ao conjunto $A = A_1 \times A_2$ onde $A_1 \in \mathcal{F}_1$ e $A_2 \in \mathcal{F}_2$ chamamos **rectângulo mensurável**. Seja $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ a colecção de todos os rectângulos mensuráveis.

**Definição 2.8.** A $\sigma$-álgebra gerada pelos rectângulos mensuráveis $\sigma(\mathcal{R})$ chama-se **$\sigma$-álgebra produto** e designa-se por $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

O nosso objectivo é encontrar uma medida $\mu$ definida em $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ tal que para qualquer rectângulo mensurável $A = A_1 \times A_2$ se tem

$$\mu(A) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2)\,.$$

Dado um conjunto mensurável $F \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, **a secção de $F$ em $x_1$** é o conjunto

$$F_{x_1} = \{x_2 \in X_2 \colon (x_1, x_2) \in F\}\ .$$

Analogamente se define a secção de $F$ em $x_2$ e designa-se por $F_{x_2}$.

**Exercício 37.** Mostre que se $F$ é um conjunto mensurável de $\mathcal{F}$ então $F_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ e $F_{x_2} \in \mathcal{F}_1$. (Dica: Mostre que a colecção $\mathcal{G} = \{F \in \mathcal{F} : F_{x_1} \in \mathcal{F}_2, \forall\, x_1 \in X_1\}$ é uma $\sigma$-álgebra que contém todos os rectângulos mensuráveis).

Dado um rectângulo mensurável $A = A_1 \times A_2$, a função $x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1})$ é simples. De facto,

$$\mu_2(A_{x_1}) = \begin{cases} \mu_2(A_2) & \text{se } x_1 \in A_1 \\ 0 & \text{se } x_1 \notin A_1 \end{cases}$$

Analogamente, se conclui que a função $x_2 \mapsto \mu_1(A_{x_2})$ é simples. Portanto,

$$\int_{X_1} \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1 = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2) = \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2})\, d\mu_2 \,.$$

Logo, este cálculo para funções simples motiva a seguinte definição de $\mu$

$$\mu(A) := \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1 = \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2})\, d\mu_2 \,.$$

Chamamos $\mu$ a **medida produto** e designamos por $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. O seguinte teorema mostra que esta definição faz sentido para qualquer conjunto mensurável $F \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

**Teorema 2.43** (Medida produto)**.** *Sejam $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ dois espaços de medida e $\mu_1, \mu_2$ duas medidas $\sigma$-finitas. Considere-se a função $\mu : \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \to [0, \infty]$ definida por*

$$\mu(F) = \int_{X_1} \mu_2(F_{x_1})\, d\mu_1 = \int_{X_2} \mu_1(F_{x_2})\, d\mu_2 \,.$$

*Então $\mu$ é uma medida em $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ e é a única medida tal que para qualquer rectângulo mensurável $A_1 \times A_2$ se tem*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2) \,.$$

*Demonstração.* Ver demonstração em [1]. □

Chegamos portanto ao seguinte teorema fundamental.

**Teorema 2.44** (de Fubini)**.** *Nas condições do teorema anterior, se $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1 \times \mu_2)$ então*

$$\int_X f\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \int_{X_2} f\, d\mu_2\, d\mu_1 = \int_{X_2} \int_{X_1} f\, d\mu_1\, d\mu_2 \,.$$

*Demonstração.* Ver demonstração em [1]. □

# Parte II
# Probabilidade

Na segunda parte deste curso, através da teoria da medida e integração desenvolvida anteriormente, iremos introduzir os principais conceitos da teoria da probabilidade e processos estocásticos.

# 3 Conceitos básicos

Considere-se uma experiência aleatória e seja $\Omega$ o conjunto formado por todos os resultados possíveis dessa experiência. Logo $\Omega$ é designado por **espaço dos resultados**. Um subconjunto $A \subset \Omega$ é designado por **acontecimento**. Uma colecção de acontecimentos $\mathcal{F}$ que forma uma $\sigma$-álgebra diz-se a **$\sigma$-álgebra de acontecimentos**. Portanto, $(\Omega, \mathcal{F})$ é um espaço mensurável.

**Definição 3.1.** Um **espaço de probabilidade** é um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $P(\Omega) = 1$.

A medida $P$ designa-se por **medida de probabilidade**. Dado um acontecimento $A \in \mathcal{F}$ o número $P(A)$ é a **probabilidade do acontecimento** $A$.

**Exemplo 3.1.** Considere a experiência aleatória de lançar uma moeda "perfeita" ao ar e observar qual das suas faces fica voltada para cima, ou seja, se é cara $= \diamondsuit$ ou coroa $= \clubsuit$.

Formalmente, tem-se o espaço de resultados $\Omega = \{\diamondsuit, \clubsuit\}$, a $\sigma$-álgebra de acontecimentos $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\diamondsuit\}, \{\clubsuit\}, \{\diamondsuit, \clubsuit\}\}$ e a medida de probabilidade $P = \delta_\diamondsuit/2 + \delta_\clubsuit/2$ onde $\delta_\diamondsuit$ e $\delta_\clubsuit$ são medidas de Dirac. A probabilidade do acontecimento "sair cara" é $P(\{\diamondsuit\}) = 1/2$.

**Exemplo 3.2.** Considere a experiência aleatória de escolher um número "ao acaso" do intervalo $[0, 1]$.

Mais concretamente, considere-se o espaço de resultados $\Omega = [0, 1]$, a $\sigma$-álgebra de acontecimentos $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ e a medida de probabilidade $P = m|_{[0,1]}$ (medida de Borel restrita ao intervalo $[0, 1]$). A probabilidade de o número que escolhemos "ao acaso" ser racional é $P(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$.

**Exemplo 3.3.** Considere-se o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ com $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Seja $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ a seguinte função,

$$P(A) = \sum_{k \in A} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad A \subset \Omega,$$

onde $0 < p < 1$. É fácil demonstrar que $P$ é uma medida de probabilidade. De facto, é claro que $P(\emptyset) = 0$. Por outro lado, se $A_i$ é uma sucessão de conjuntos disjuntos então

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{k\in\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k\in A_i} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
P(\Omega) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1
$$

Dada uma função mensurável $g : \Omega \to [0,\infty]$, é claro que $g$ é simples. Logo,

$$
\int_A g\,dP = \sum_{k\in A} g(k)P(\{k\}) = \sum_{k\in A} g(k)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\,.
$$

## 3.1 Variáveis aleatórias

Por vezes, é conveniente associar ao resultado de uma experiência aleatória um número real. Considere-se um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e o espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ onde $\mathcal{B}$ é a $\sigma$-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.

**Definição 3.2.** Uma função mensurável $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diz-se uma **variável aleatória**.

Associada a uma variável aleatória $X$ podemos definir uma medida na $\sigma$-álgebra de Borel que não é mais do que a medida imagem de $P$ por $X$,

$$
p_X(B) = P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}\,.
$$

Note que $p_X$ é uma medida de probabilidade no espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Designamos esta medida por **distribuição de probabilidade da variável aleatória** $X$.

**Observação 3.4.** É também usual escrever-se

$$
p_X(B) = P(X \in B)\,.
$$

De acordo com a Proposição 1.7 podemos definir a **função de distribuição da variável aleatória** $X$, como a função $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$F_X(x) = p_X(]-\infty, x]) \,.$$

Veremos que $F_X$ carateriza completamente a distribuição de probabilidade da variável aleatória $X$. De certa forma, a função de distribuição $F_X$ constitui o modelo probabilístico que descreve a experiência aleatória, sendo também designada como a **lei de probabilidade** da variável aleatória $X$.

**Observação 3.5.** É usual escrever-se $F_X(x)$ de diversas maneiras, todas equivalentes entre si, isto é

$$F_X(x) = P(X^{-1}(]-\infty, x])) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x) = P(X \leq x) \,.$$

**Exercício 38.** Considere o espaço de probabilidade $([0,1], \mathcal{B}, m)$ e a variável aleatória $X(\omega) = \min(\omega, 1-\omega)$. Calcule $F_X$.

**Exercício 39.** Suponha que um comboio parte aleatoriamente do Porto entre as 8h e as 10h da manhã com destino a Lisboa, que fica a 300km de distância. Suponha também que o comboio viaja a uma velocidade constante de 100km/h.

1. Determine a variável aleatória que descreve a distância entre o comboio e Lisboa às 12h.
2. Calcule a distribuição de probabilidade dessa variável aleatória e a respectiva função de distribuição.

No resultado que se segue resumimos as propriedades da função de distribuição $F_X$.

**Proposição 3.6.** *A função $F_X$ tem as seguintes propriedades:*

1. *é uma função de distribuição no sentido da Definição 1.3.*
2. $p_X(]a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$
3. $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$
4. $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ *e* $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

*Demonstração.* Deixa-se como exercício. □

**Observação 3.7.** Note-se que da segunda propriedade, podemos afirmar que $p_X$ é uma medida de Borel-Stieltjes associada à função de distribuição $F_X$.

**Exercício 40.** Seja $X$ uma variável aleatória e $F_X$ a sua função de distribuição. Mostre que: