Definição 5.1. Para cada $\omega \in \Omega$, a sucessão de números reais

$$(X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), \ldots)$$

é designada por **trajectória** ou **realização**.

Definição 5.2. As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$ dizem-se **independentes** sse $X_1, \ldots, X_n$ são independentes para todo $n \geq 1$ e dizem-se **identicamente distribuídas** sse X_i, $i = 1, 2, \ldots$ tiverem a mesma distribuição de probabilidade.

Observação 5.1. Variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas são designadas por **IID**.

Um problema fundamental relacionado com sucessões de variáveis aleatórias é o estudo do seu comportamento assimptótico. Como exemplo, considere-se o lançamento de uma moeda ao ar um número arbitrário de vezes. Seja $X_i = 1$ se a moeda fica de face voltada para cima no i-ésimo lançamento e $X_i = 0$ caso contrário. Assumindo que a moeda é "perfeita" temos que

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2}\,.$$

Supondo que os lançamentos são independentes entre si, temos uma sucessão de variáveis aleatórias $(X_1, X_2, \ldots)$ IID. Forme-se a soma,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n\,,$$

que representa o número de faces em n lançamentos. Quando tomamos o limite $n \to \infty$ esperamos que a razão $\frac{S_n}{n}$ se aproxime da probabilidade real de a face ficar voltada para cima, ou seja, $\frac{1}{2}$. Este tipo de resultado é conhecido pela lei dos grandes números.

Proposição 5.2 (Lei fraca dos grandes números)**.** *Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tal que*

$$E(X_i) = \mu < \infty \quad e \quad \mathrm{Var}(X_i) \leq K < \infty\,, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots\,.$$

Então $\frac{S_n}{n}$ converge em probabilidade para μ, ou seja,

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \epsilon\right) = 1\,.$$

Demonstração. Em primeiro lugar note-se que $E(S_n) = n\mu$ pela linearidade do valor esperado e $\mathrm{Var}(S_n) \leq nK$ porque $X_1, X_2, \ldots$ são independentes. Logo, aplicando a desigualdade de Markov vem que,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = P\left((S_n - n\mu)^2 \geq n^2\epsilon^2\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\epsilon^2} \leq \frac{K}{n\epsilon^2}\,.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0\,.$$

Ou seja, dado $\epsilon > 0$ arbitrário tem-se

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \epsilon\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 1\,.$$

□

Observação 5.3. Existem resultados de convergência mais fortes que o anterior, nomeadamente a lei forte dos grandes números que estabelece a convergência $S_n/n \to \mu$ à excepção de um conjunto de probabilidade nula: se $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias IID com valor esperado finito então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\,, \quad P\text{-q.c.}\,.$$

5.1 Martingalas

O termo Marginala tem as suas origens nos jogos de apostas e descreve o conceito de jogo honesto. As martingalas encontram aplicações em diversas áreas, nomeadamente em matemática financeira, na modelação de activos financeiros. Antes de passarmos à definição de martingala temos de introduzir o conceito de filtração.

Definição 5.3. Diz-se que as σ-álgebras $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ de partes de Ω formam uma **filtração** sse $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$.

Exemplo 5.4. Considere uma sucessão de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ e as σ-álgebras $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ definidas da seguinte maneira,

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)\,.$$

Então $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ formam uma filtração e representam toda a informação até ao instante n, ou seja, todos os acontecimentos possíveis de observar de $(X_1, \ldots, X_n)$. A filtração $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ designa-se por **filtração canónica**.

Definição 5.4. Diz-se que uma sucessão de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ é **adaptada** à filtração $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ sse X_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável.

Exemplo 5.5. Qualquer sucessão de variáveis aleatórias é adaptada à filtração canónica.

Estamos em condições de definir o conceito de martingala.

Definição 5.5. Uma sucessão de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma **martingala** relativamente à filtração $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ sse

1. X_n é integrável para todo $n = 1, 2, \ldots$, ou seja, $E(|X_n|) < \infty$.
2. $(X_1, X_2, \ldots)$ é adaptada a $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots)$.
3. $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, P-q.c. para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Observação 5.6. Da definição de esperança condicional tem-se

$$\int_A E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\, dP = \int_A X_{n+1}\, dP\,, \quad \forall\, A \in \mathcal{F}_n\,.$$

Por outro lado, segue da terceira condição da definição de martingala que

$$\int_A X_n\, dP = \int_A X_{n+1}\, dP\,.$$

Portanto, tomando $A = \Omega$ temos que

$$E(X_{n+1}) = E(X_n)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Usando indução prova-se que $E(X_n) = E(X_1)$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Ou seja, uma martingala $(X_n)_{n\geq 1}$ tem valor esperado constante.

Observação 5.7. Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma martingala relativamente à filtração $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ então

$$E(X_n|\mathcal{F}_k) = X_k\,, \quad \text{para } k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\,.$$

De facto, usando as propriedades da esperança condicional podemos escrever

$$E(X_n|\mathcal{F}_k) = E(E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})|F_k) = E(X_{n-1}|\mathcal{F}_k)\,.$$

Usando indução temos que

$$E(X_n|\mathcal{F}_k) = E(X_k|\mathcal{F}_k) = X_k\,.$$

Exemplo 5.8. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com valor esperado nulo. O **passeio aleatório**,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n\,,$$

é uma martingala relativamente à filtração canónica

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)\,.$$

De facto, a primeira e segunda condição da definição de martingala verificam-se trivialmente. Relativamente à terceira condição temos que,

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}|X_1,\dots,X_n) &= E(X_{n+1}+S_n|X_1,\dots,X_n) \\ &= E(X_{n+1}|X_1,\dots,X_n)+E(S_n|X_1,\dots,X_n) \\ &= E(X_{n+1})+S_n \\ &= S_n \end{aligned}$$

Exemplo 5.9. Seja Y uma variável aleatória integrável, isto é $E(|Y|) < \infty$ e $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ uma filtração. Então a sucessão de variáveis aleatórias

$$X_n = E(Y|\mathcal{F}_n)\,, \quad n = 1, 2, \dots$$

é uma martingala relativamente à filtração $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. De facto,

$$|X_n| = |E(Y|\mathcal{F}_n)| \leq E(|Y|\,|\mathcal{F}_n)\,.$$

Logo,

$$E(|X_n|) \leq E(E(|Y|\,|\mathcal{F}_n)) \leq E(|Y|) < \infty\,.$$

Por outro lado,

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(E(Y|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = E(Y|\mathcal{F}_n) = X_n\,.$$

Esta martingala é conhecida como **processo de Doob**.

Exemplo 5.10. Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes tais que $E(X_n) = 1$ para todo $n \geq 1$. A sucessão de variáveis aleatórias

$$Z_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n\,,$$

é uma martingala relativamente à filtração canónica $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. De facto, uma vez que as variáveis X_n são independentes temos que

$$E(Z_n) = E(X_1 \cdots X_n) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) = 1\,.$$

Logo, $E(|Z_n|) < \infty$. Por outro lado,

$$E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}\cdot Z_n|\mathcal{F}_n) = Z_n E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = Z_n E(X_{n+1}) = Z_n\,.$$

Exercício 50. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma martingala relativamente à filtração $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. Mostre que $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma martingala relativamente à filtração canónica,

$$\mathcal{G}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)\,.$$

Retomando o exemplo do lançamento da moeda, considere o seguinte jogo. Se no n-ésimo lançamento da moeda sair face então ganha 1 euro, caso contrário perde 1 euro. Formalizando, seja $\Omega = \{\mathrm{E}, \mathrm{F}\}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as sequências de letras possíveis de formar com $\{\mathrm{E}, \mathrm{F}\}$ e $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ a variável aleatória que toma os valores $X_n(\omega) = 1$ se a n-ésima letra da sequência ω for um F e $X_n(\omega) = -1$ caso contrário. Logo, concluímos do Exemplo 5.8 que o ganho total até ao n-ésimo lançamento,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n\,,$$

é uma martingala relativamente à filtração canónica. Portanto, da terceira condição da definição de martingala concluímos que o lançamento de uma moeda perfeita é um exemplo de um **jogo justo**, ou seja, que perante a informação acumulada até ao n-ésimo lançamento, espera-se que no lançamento seguinte o ganho total não se altere.

Nem todos os jogos são justos, no sentido em que podem existir jogos mais favoráveis que outros. Um exemplo de um jogo favorável seria o do lançamento de dois dados em que o apostador ganharia se a soma dos dados fosse maior ou igual a 6.

Definição 5.6. Uma sucessão de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma **supermartingala** (**submartingala**) relativamente à filtração $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ sse

1. X_n é integrável para todo $n = 1, 2, \ldots$.
2. $(X_1, X_2, \ldots)$ é adaptada a $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots)$.
3. $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ (respectivamente, $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$) para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Portanto, uma supermartingala (submartingala) representa um jogo desfavorável (respectivamente, favorável).

5.1.1 Estratégias

Considere um jogo de apostas em que em cada jogada é possível apostar uma certa quantidade que pode ou não perder com certa probabilidade. Ou seja, considere uma sucessão de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ tais que $E(|X_n|) < \infty$ que representam o valor que pode ganhar ou perder em cada jogada. Se as suas apostas em cada jogada são igual à unidade então o ganho total no final de n jogadas é

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n\,.$$

Considere a filtração canónica e por conveniência tome $S_0 = 0$ e $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Suponhamos que decide em cada jogada alterar a sua aposta com base nas jogadas anteriores. Ou seja, na jogada n faz uma aposta α_n que é uma função mensurável relativamente à informação das jogadas anteriores $\mathcal{F}_{n-1}$. Então o ganho total até à n-ésima jogada é dado por,

$$Z_n = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n\,.$$

Uma **estratégia** é uma sucessão de funções $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ tais que α_n é mensurável relativamente a $\mathcal{F}_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Numa situação real, as apostas α_n terão de ser funções limitadas, uma vez que nenhum jogador pode dispôr de fundos ilimitados. Portanto, uma **estratégia limitada** é uma estratégia $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ tal que α_n é uma função limitada para $n = 1, 2, \ldots$.

A seguinte proposição demonstra que é impossível através de uma estratégia limitada alterar um jogo a nosso favor.

Proposição 5.11. *Se $(S_n)_{n\geq 1}$ é uma martingala relativamente a $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ e $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ é uma estratégia limitada. Então $(Z_n)_{n\geq 1}$ é uma martingala relativamente a $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.*

Demonstração. Seja $C_n = \max_{1\leq k\leq n} |\alpha_n|$. Note-se que $C_n < \infty$ por hipótese. Então,

$$E(|Z_n|) = E(|\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n|) \leq C_n E(|S_n|) < \infty\,.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} E(Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= E(Z_{n-1} + \alpha_n(S_n - S_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= E(Z_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) + E(\alpha_n(S_n - S_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= Z_{n-1} + \alpha_n(E(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) - S_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Como α_n é limitada temos que $\alpha_n(E(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) - S_{n-1}) = 0$ pela definição de martingala. Logo $E(Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1}$. $\square$

Observação 5.12. É válido um resultado análogo no contexto de supermartingalas (submartingalas). Mais concretamente, se α_n é uma estratégia limitada não negativa ($\alpha_n \geq 0$) e S_n uma supermartingala (submartingala) então Z_n é uma supermartingala (submartingala).

Exemplo 5.13 (A martingala)**.** Considere novamente o jogo do lançamento repetido de uma moeda perfeita. O ganho acumulado é dado por

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n\,,$$

onde $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias IID tais que $X_n = 1$ ou $X_n = -1$ com igual probabilidade.

A **martingala** é um tipo de estratégia usada nos jogos de apostas que teve origem em França no século XVIII. A estratégia consiste em cada jogada duplicar a aposta anterior caso o resultado anterior tenha sido desfavorável. Ou seja,

$$\alpha_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } X_1 = X_2 = \cdots = X_{n-1} = -1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto, ao fim de n jogadas tem um ganho acumulado de

$$Z_n = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n \,,$$

Segue da proposição anterior que Z_n é uma martingala relativamente à filtração canónica,

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n) \,.$$

Note-se que $E(Z_n) = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$ (uma das propriedades da martigala). Considere agora o menor n tal que o resultado da n-ésima jogada foi favorável, ou seja, a função

$$\tau(\omega) = \min \{n \in \mathbb{N} \colon X_n(\omega) = 1\} \,.$$

Note-se que o acontecimento $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. De facto, como podemos escrever

$$\{\tau = n\} = \{X_1 = -1\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} = -1\} \cap \{X_n = 1\} \,.$$

segue que $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. Por outras palavras, o jogador toma a decisão de parar o jogo na n-ésima jogada com base na informação de todas as jogadas que já fez. Designamos a função τ por **tempo de paragem**. Usando o tempo de paragem podemos escrever o ganho acumulado,

$$Z_n(\omega) = \begin{cases} -1 - 2 - \ldots - 2^{n-1} & \text{se } n < \tau(\omega) \\ 1 & \text{se } n \geq \tau(\omega) \end{cases} \,.$$

Sempre que $n = \tau(\omega) < \infty$ temos que $Z_{\tau(\omega)}(\omega) = 1$. De facto $Z_\tau = 1$, P-q.c. uma vez que $P(\tau < \infty) = 1$. Logo

$$E(Z_\tau) = 1 \,.$$

Por outro lado,

$$E(Z_{\tau-1}) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1 - \ldots - 2^{n-2}) P(\tau = n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 - 2^{n-1}}{2^n} = -\infty \,.$$

Ou seja, um jogador pode ir acumulando pequenos ganhos ao longo do tempo dando a ilusão de que a sua estratégia é ganhadora. No entanto, a possibilidade remota de ter um prejuízo catastrófico contrabalança esses ganhos e pode levar o jogador à falência rapidamente. Portanto, a estratégia da martingala é apenas bem sucedida se o jogador dispôr de recursos e tempo ilimitados.

5.1.2 Tempos de paragem

Motivados pelo exemplo anterior, fazemos a seguinte definição.

Definição 5.7. Um **tempo de paragem relativamente à filtração** $\mathcal{F}_n$ é uma função $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ que satisfaz

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n\,, \quad n = 1, 2, \dots\,.$$

Quando é claro a que filtração se refere o tempo de paragem, dizemos apenas que τ é um tempo de paragem.

Exercício 51. Mostre que $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ sse $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Exercício 52. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias adaptada a uma filtração $\mathcal{F}_n$ e seja $B \subset \mathbb{R}$ um Boreliano. Mostre que o **tempo de primeira entrada** de X_n em B,

$$\tau(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N} \colon X_n(\omega) \in B\}\ ,$$

é um tempo de paragem relativamente a $\mathcal{F}_n$. (Dica: generalizar o argumento do Exemplo 5.13 escrevendo $\{\tau = n\}$ como uma intersecção de acontecimentos em $\mathcal{F}_n$).

Se $(X_n)_{\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias adaptada a uma filtração $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. Dado um tempo de paragem τ podemos definir uma nova sucessão,

$$X_n^\tau(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{se } n \leq \tau(\omega) \\ X_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{se } n > \tau(\omega) \end{cases}\ ,$$

que representa a **sucessão** $(X_n)_{n\geq 1}$ **parada no instante** τ. Por exemplo, se ω é tal que $\tau(\omega) = 3$ então a realização da sucessão original é

$$X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), X_4(\omega), X_5(\omega), \dots$$

enquanto que a realização da sucessão parada nesse instante é

$$X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), X_3(\omega), X_3(\omega), \dots\,.$$

Observação 5.14. É usual escrever-se,

$$X_n^\tau(\omega) = X_{\min\{n,\tau(\omega)\}}(\omega) = X_{\tau(\omega)\wedge n}(\omega)\,, \quad \forall\,\omega \in \Omega\,,$$

onde $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

A função,

$$X_\tau(\omega) = \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{se } \tau(\omega) < \infty \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

é designada por X_n **no momento exacto do tempo de paragem**. Note-se que X_τ é $\mathcal{F}$-mensurável, uma vez que,

$$X_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot \chi_{\{\tau=n\}}\,.$$

Vimos na secção anterior que não é possível através de uma estratégia limitada alterar um jogo justo a nosso favor. A seguinte proposição mostra um resultado semelhante no contexto dos tempos de paragem.

Proposição 5.15. *Seja X_n uma martingala relativamente à filtração $\mathcal{F}_n$ e τ um tempo de paragem. Então $X_{\tau\wedge n}$ é uma martingala relativamente a $\mathcal{F}_n$.*

Demonstração. Seja

$$\alpha_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq \tau(\omega) \\ 0 & \text{se } n > \tau(\omega) \end{cases}.$$

Então podemos escrever,

$$X_{\tau\wedge n} = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \cdots + \alpha_n Y_n\,,$$

onde

$$Y_1 = X_1 \quad \text{e} \quad Y_k = X_k - X_{k-1}\,, \quad \forall\, k \geq 2\,.$$

É fácil verificar que α_n é uma estratégia limitada. De facto, dado um Boreliano B de $\mathbb{R}$ temos que:

- se $0 \notin B$ e $1 \notin B$ então $\{\alpha_n \in B\} = \emptyset \in \mathcal{F}_{n-1}$;
- se $0 \in B$ e $1 \notin B$ então $\{\alpha_n \in B\} = \{\tau < n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$;
- se $0 \notin B$ e $1 \in B$ então $\{\alpha_n \in B\} = \{\tau \geq n\} = \{\tau < n\}^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}_{n-1}$;
- se $0 \in B$ e $1 \in B$ então $\{\alpha_n \in B\} = \Omega \in \mathcal{F}_{n-1}$.

Logo α_n é $\mathcal{F}_{n-1}$-mensurável. Para provar que $X_{\tau\wedge n}$ é uma martingala basta mostrar, pela Proposição 5.11, que $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ é uma martingala relativamente a $\mathcal{F}_n$. Mas

$$S_n = X_1 + (X_2 - X_1) + \cdots + (X_n - X_{n-1}) = X_n\,.$$

□

Observação 5.16. É válido um resultado análogo no contexto de supermartingalas (submartingalas).

5.1.3 Teorema de paragem opcional

Vimos na secção anterior que se X_n é uma martingala e τ um tempo de paragem então $X_{\tau\wedge n}$ é também uma martingala. Adicionalmente,

$$E(X_{\tau\wedge n}) = E(X_n) = E(X_1)\,.$$

No entanto, se considerarmos X_n no momento exacto do tempo de paragem,

$$X_\tau(\omega) = \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{se } \tau(\omega) < \infty \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}\,,$$

então nem sempre $E(X_\tau) = E(X_1)$. Como exemplo veja-se o caso da estratégia de martingala. O teorema de paragem opcional estabelece condições suficientes para que a propriedade da martingala se estenda a tempos de paragem, isto é,

$$E(X_\tau) = E(X_1)\,.$$

Antes de enunciar o teorema, necessitamos de uma definição técnica.

Definição 5.8. Uma sucessão de variáveis aleatórias $(Y_n)_{n\geq 1}$ diz-se **uniformemente integrável** sse existir uma função integrável $g : \Omega \to [0,\infty]$ tal que $|Y_n| \leq g$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Estamos em condições de enunciar o teorema.

Teorema 5.17 (da paragem opcional de Doob)**.** *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma martingala relativamente a uma filtração $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ e τ um tempo de paragem. Se $P(\tau < \infty) = 1$ e $(X_{\tau\wedge n})_{n\geq 1}$ é uniformemente integrável então $E(X_\tau) = E(X_1)$.*

Ou seja, não é possível alterar um jogo a nosso favor usando uma estratégia de paragem que satisfaça as condições do teorema. Antes de comentarmos acerca das condições do teorema vejamos a sua demonstração.

Demonstração. Uma vez que $P(\tau < \infty) = 1$ segue que

$$\lim_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n} = X_\tau\,, \quad P\text{-q.c.}$$

De facto, dado $\omega \in \Omega$ tal que $\tau(\omega) < \infty$, existe $k \geq 1$ tal que $X_{\tau(\omega)\wedge n}(\omega) = X_\tau(\omega)$ para todo $n \geq k$. Logo, segue do Teorema da convergência dominada que

$$E(X_\tau) = \lim_{n\to\infty} E(X_{\tau\wedge n}) = \lim_{n\to\infty} E(X_1) = E(X_1)\,.$$

$\square$

Das duas condições do teorema da paragem opcional a mais difícil de verificar é $X_{\tau\wedge n}$ uniformemente integrável. Contudo existem alguns casos em que podemos verificar essa condição com facilidade.

Proposição 5.18. *A martingala $(X_{\tau\wedge n})_{n\geq 1}$ é uniformemente integrável se alguma das seguintes condições se verificar:*

1. *A sucessão $(X_{\tau\wedge n})_{n\geq 1}$ é limitada, ou seja, existe um $M \geq 0$ tal que $|X_{\tau\wedge n}| \leq M$ para todo $n \geq 1$.*
2. *O tempo de paragem é limitado: $P(\tau \leq k) = 1$ para algum $k \geq 1$.*
3. *$E(\tau) < \infty$ e existe um $M > 0$ tal que*

$$\forall\, k \geq 1 \quad E(|X_{k+1} - X_k|\,|\mathcal{F}_k) \leq M\,.$$

Demonstração.

1. Segue directamente da Definição 5.8.
2. Se $\tau \leq k$ P-q.c. então

$$|X_{\tau\wedge n}| \leq \max\{|X_1|,\ldots,|X_k|\}\,.$$

   Logo, $X_{\tau\wedge n}$ é uniformemente integrável.
3. Seja,

$$W = |X_1 - X_0| + |X_2 - X_1| + \ldots + |X_\tau - X_{\tau-1}|\,,$$

   onde por conveniência se define $X_0 = 0$ e $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ a σ-álgebra trivial. Segue da definição de $X_{\tau\wedge n}$ que

$$|X_{\tau\wedge n}| \leq W\,, \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots$$

   Basta mostrar que W é integrável, ou seja, $E(W) < \infty$. Em primeiro lugar note-se que,

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} |X_{k+1} - X_k|\,\chi_{\{\tau\geq k+1\}}\,.$$

   Por outro lado, como $E(|X_{k+1} - X_k|\,\mathcal{F}_k) \leq M$ temos que

$$\begin{aligned} E(|X_{k+1} - X_k|\,\chi_{\{\tau\geq k+1\}}|\mathcal{F}_k) &= \chi_{\{\tau\geq k+1\}}E(|X_{k+1} - X_k|\,|\mathcal{F}_k) \\ &\leq M\chi_{\{\tau\geq k+1\}}\,. \end{aligned}$$

   Logo, $E(|X_{k+1} - X_k|\,\chi_{\tau\geq k+1}) \leq MP(\{\tau \geq k+1\})$. Assim temos que,

$$\begin{aligned} E(W) = \sum_{i=0}^{\infty} E(|X_{k+1} - X_k|\,\chi_{\{\tau\geq k+1\}}) &\leq \sum_{i=0}^{\infty} MP(\{\tau \geq k+1\}) \\ &= ME(\tau) < \infty\,. \end{aligned}$$

□

Exemplo 5.19 (O jogo da ruína)**.** Retomemos o jogo do lançamento repetitivo de uma moeda perfeita. Seja $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias IID tais que $X_n \in \{-1, 1\}$ com igual probabilidade. Então o passeio aleatório,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \,,$$

é uma martingala relativamente a $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Considere-se o tempo de paragem,

$$\tau = \min \{n \in \mathbb{N} \colon S_n \in \{-a, b\}\} \,,$$

onde $0 < a, b$. Ou seja, o jogo termina quando o jogador obtiver um prejuízo de a euros ou um lucro de b euros. Desejamos calcular a probabilidade $p_a = P(S_\tau = -a)$, isto é, a probabilidade de o jogador acabar o jogo com um prejuízo de a euros em vez de um lucro de b euros.

Suponhamos que as condições de aplicabilidade do teorema da paragem opcional se verificam, isto é,

- $P(\tau < \infty) = 1$
- $S_{\tau \wedge n}$ é uniformemente integrável

Então, do teorema da paragem opcional segue que $E(S_\tau) = E(S_1) = 0$. Por outro lado,

$$0 = E(S_\tau) = -ap_a + b(1 - p_a) \,.$$

Logo,

$$p_a = \frac{b}{b + a} \,.$$

Portanto, se o jogador tiver a euros e estiver disposto jogar enquanto não os perder, então a probabilidade de ruína é,

$$\lim_{b \to \infty} p_a = \lim_{b \to \infty} \frac{b}{b + a} = 1 \,.$$

Verifiquemos agora as condições do teorema.

- Uma vez que $X_{\tau \wedge n} \in [-a, b]$ logo $X_{\tau \wedge n}$ é uma sucessão limitada. Portanto uniformemente integrável.
- Demonstremos $P(\tau < \infty) = 1$. Seja $l = a + b$ o comprimento do intervalo $[-a, b]$ e A_k o acontecimento,

$$A_k = \left\{ X_{(k-1)l+1} = X_{(k-1)l+2} = \cdots = X_{kl} = 1 \right\} \,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Note-se que $P(A_k) = \frac{1}{2^l}$ para todo $k = 1, 2, \ldots$. Se A_1 ocorrer então o jogo terminou antes de se chegarem às l jogadas, uma vez que $S_l > b$. Logo, $A_1 \subset \{\tau \leq l\}$ e segue que

$$P(\tau > l) \leq P(A_1^c) = 1 - \frac{1}{2^l}\,.$$

Se no entanto $A_1 \cup A_2$ ocorrer então $S_m = b$ para algum $m \in \{1, \ldots, 2l\}$. Logo o jogo terminou antes de se chegar à $2l$-jogada. Logo, $A_1 \cup A_2 \subset \{\tau \leq 2l\}$. Portanto,

$$P(\tau > 2l) \leq P((A_1 \cup A_2)^c) = P(A_1^c)P(A_2^c) = \left(1 - \frac{1}{2^l}\right)^2\,.$$

Generalizando este argumento obtemos que,

$$P(\tau > kl) \leq P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i^c\right) = \left(1 - \frac{1}{2^l}\right)^k\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Logo,

$$P(\tau = \infty) = \lim_{k \to \infty} P(\tau > kl) = 0\,.$$

Proposição 5.20 (Equação de Wald)**.** *Seja X_n uma sucessão de variáveis aleatórias IID com $E(|X_n|) \leq M$ para algum $M \geq 0$ e τ um tempo de paragem relativamente à filtração $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ tal que $P(\tau < \infty) = 1$ e $E(\tau) < \infty$. Então*

$$E(\sum_{i=1}^{\tau} X_i) = \mu E(\tau)\,,$$

onde $\mu = E(X_n)$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Demonstração. Seja $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i - n\mu$. Uma vez que Z_n é uma martingala então se o teorema da paragem opcional for aplicável temos que

$$0 = E(Z_\tau) = E(\sum_{i=1}^{\tau} X_i - \tau\mu) = E(\sum_{i=1}^{\tau} X_i) - \mu E(\tau)\,.$$

Logo, resta verificar as condições do teorema. De facto, usando a Proposição 5.18 basta provar que existe um $M \geq 0$ tal que,

$$E(|Z_{n+1} - Z_n|\,|\mathcal{F}_n) \leq M\,, \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Mas,

$$\begin{aligned} E(|Z_{n+1} - Z_n|\,|\mathcal{F}_n) &= E(|X_{n+1} - \mu|\,|\mathcal{F}_n) \\ &= E(|X_{n+1} - \mu|) \\ &\leq E(|X_{n+1}|) + \mu \\ &\leq M + \mu < \infty\,. \end{aligned}$$