Mestrado em Matemática Financeira

Processos de Lévy e aplicações

Exame - Época Normal

Duração: 2 horas

17 de Janeiro de 2014

1.

(a) Descreva as principais limitações do modelo Black-Scholes e explique de que forma os modelos baseados em processos de Lévy podem ultrapassar estas limitações. (2 valores)

(b) Apresente a decomposição de Lévy-Itô para um processo de Lévy em geral e interprete financeiramente os termos de saltos da decomposição. (1,5 valores)

2. Considere um processo de difusão com saltos ("jump-diffusion") sem compensação dos saltos.

(a) Defina o processo de Lévy associado ao modelo financeiro de difusão com saltos ("jump-diffusion") de Merton, interpretando cada um dos termos na definição e apresentando a a função característica do processo de Lévy no instante $t = 1$ e o tripleto de características do processo. (2 valores)

(b) Considere o processo de difusão com saltos com mistura de exponenciais, em que a distribuição da amplitude dos saltos tem uma função densidade de probabilidade dada por:

$$f_J(x) = p\theta_1 e^{\theta_1 x}\mathbf{1}_{\{x<0\}} + (1-p)\,\theta_2 e^{-\theta_2 x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

Determine a função característica associada a este processo no instante $t = 1$ e mostre que a medida ν associada ao processo satisfaz as condições de medida de Lévy. (2 valores)

3. Considere uma distribuição com função característica

$$\phi(u) = \exp\left(imu - \sigma|u|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}\mathrm{sgn(u)}\log|u|\right]\right)$$

com $\sigma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ e $m \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que a distribuição é infinitamente divisível. (2 valores)

(b) Seja X uma variável aleatória com a distribuição dada no caso $\beta = 0$. Diga qual a designação habitualmente atribuída à distribuição de X, apresente a função densidade de probailidade da variável aleatória X, diga qual o valor de $\mathbb{E}[|X|]$ e descreva como é o decaimento da distribuição de X quando $x \to +\infty$, isto é, como é o decaimento de $\mathbb{P}[X > x]$ em função de x quando $x \to +\infty$. (2 valores)

4. Seja X um processo de Lévy com medida de Lévy associada $\nu(dx) = \frac{\exp(-x)}{x^2}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$.

(a) Calcule o valor esperado do integral de Poisson

$$\mathbb{E}\left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^x N(t,dx)\right].$$

com $\varepsilon > 0$ e determine a função $h(t,\varepsilon)$ de forma a que

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{x} N(t,dx) - h(t,\varepsilon)$$

seja uma martingala. (2 valores)

(b) Considere que o processo X é solução da equação diferencial estocástica

$$dX_t = 2X_{t-}dt + X_{t-}dB_t + X_{t-}\int_{|x|\geq 1}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)N\left(dt,dx\right),$$

Resolva esta equação (sugestão: aplique a fórmula de Itô com a função $f(X_t) = \ln\left(X_t\right)$). (2,5 valores)

5. Considere um mercado em que o preço do activo com risco S_t é modelado pela equação diferencial estocástica

$$dS(t) = S\left(t-\right)dZ\left(t\right),$$

onde $Z\left(t\right) = \sigma X\left(t\right) + \mu t$ e $X\left(t\right)$ é um processo de Lévy com decomposição

$$X\left(t\right) = mt + kB\left(t\right) + \int_{c}^{+\infty} x\widetilde{N}(t,dx),$$

com $k \geq 0$, $m \geq 0$ e $c < -1$. Assuma que a taxa de juro sem risco é $r > 0$.

(a) Apresente a condição que as constantes σ,μ,k,m e r devem satisfazer para que o processo de preço descontado do activo com risco seja uma martingala relativamente a uma medida equivalente de martingal Q e discuta a completude do mercado nos casos em que:

(i) $X(t) = mt + \widetilde{N}(t)$, onde $\widetilde{N}(t)$ é um processo de Poisson compensado.

(ii) $X = mt + \widetilde{N}_1\left(t\right) + \widetilde{N}_2\left(t\right)$, onde $\widetilde{N}_1$ e $\widetilde{N}_2$ são processos de Poisson compensados de intensidades λ_1 e λ_2 e com saltos de amplitudes c_1 e c_2, respectivamente (suponha que $\widetilde{N}_1$ e $\widetilde{N}_2$ são independentes). (2 valores)

(b) Mostre que a equação que define a condição geral que é preciso ser satisfeita para que o processo de preço descontado do activo com risco seja uma martingala relativamente a uma medida equivalente de martingala Q pode ter, em geral, um número infinito de soluções (F,H).

Sugestão: Considere que $\frac{dP}{dQ} = e^{Y(T)}$ onde $dY(t) = G(t)dt + F(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} H(t,x)\widetilde{N}(dt,dx)$ e mostre que se (F,H) é uma solução da equação então também é solução o par $(F + \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} f(x)\nu\left(dx\right),$ $\log\left(e^{H} - \frac{kf(x)}{x}\right)$ para qualquer $f \in L^1\left(\mathbb{R}\backslash\{0\},\nu\right)$. (2 valores)