Mestrado em Matemática Financeira

Processos de Lévy e aplicações

Exame - Época de Recurso

Duração: 2 horas

30 de Janeiro de 2014

1.

(a) Defina o que entende por variável aleatória infinitamente divisível e por variável aleatória estável, apresente 3 exemplos de distribuições infinitamente divisíveis e 3 exemplos de distribuições estáveis. (2,5 valores)

(b) Seja $X = (X_1, X_2, X_3)$ um vector aleatório Gaussiano com distribuição $N(m, A)$, onde $A = I$ é a matriz de covariância simétrica e definida positiva e $m = (1, -1, 0)$. Sabendo que a função característica geral para uma variável aleatória Gaussiana unidimensional de distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ é

$$\phi(u) = \exp\left(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right),$$

diga qual é a função característica do vector $X = (X_1, X_2, X_3)$ e mostre que a distribuição de X é infinitamente divisível. (2 valores)

2. Considere um processo de Lévy $U(t)$ com características (b, c, ν).

(a) Quais as condições que devem satisfazer os parâmetros b e c e a medida de Lévy ν de forma a que o processo U seja um subordinador? Apresente ainda a forma geral da função característica de $U(t)$ quando o processo U é um subordinador. (2 valores)

(b) Seja U um subordinador $(1/2)$-estável e X um processo estocástico tal que $X(t) = \sqrt{2}B(t)$, onde $B(t)$ é um movimento Browniano standard independente de $U(t)$. Que tipo de processo é o processo (que se obtém por transformação temporal) $V(t) = X(U(t))$ e qual a distribuição de $V(1)$? Justifique adequadamente. (2 valores)

3. Considere um processo de Lévy X_t com tripleto de características $(b, 0, \nu)$ e medida de Lévy $\nu(dx) = x^\alpha \mathbf{1}_{\{0<x<1\}} + x^\beta \mathbf{1}_{\{x>1\}}$. Determine quais os valores para os parâmetros α e β de forma a que ν seja uma medida de Lévy e o processo tenha:

(i) actividade finita

(ii) actividade infinita

(iii) trajectórias com variação finita

(2,5 valores)

4. Seja X um processo de Lévy com tripleto de características (b, c, ν) e com medida de Lévy

$$\nu(dx) = x\mathbf{1}_{\{0<x<1\}} + \frac{1}{x^6}\mathbf{1}_{\{x\geq 1\}},$$

(a) Calcule a variância do seguinte integral de Poisson

$$\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} x^2 N(5, dx),$$

e descreva o que representa este integral em termos de amplitudes de saltos do processo de Lévy no intervalo de tempo $[0, 5]$. (2 valores)

(b) Considere que o processo X é solução da equação diferencial estocástica

$$dX_t = (m - X_{t-})\, dt + \sigma dB_t + \int_{|x|\geq 1} xN\,(dt, dx)\,, \qquad \text{com } X\,(0) = 1.$$

Resolva esta equação (sugestão: Considere o processo $e^t X_t$ e aplique a fórmula de Itô de forma adequada). (2,5 valores)

5. Considere um integral estocástico do tipo Lévy

$$dY(t) = G\,(t)\, dt + F\,(t)\, dB\,(t) + \int_{|x|<1} H\,(t, x)\, \widetilde{N}\,(dt, dx)$$
$$+ \int_{|x|\geq 1} K\,(t, x)\, N\,(dt, dx)\,.$$

(a) Deduza qual a condição (equação) que é necessário os processos $G\,(t)$, $F(t)$, $H(t, x)$ e $K(t, x)$ verificarem para que o processo $e^{Y(t)}$ seja uma martingala, justificando convenientemente. (2,5 valores)

(b) Usando a condição (equação) obtida em (a) verifique se $e^{Y(t)}$ é martingala para os seguintes processos:

(i) $Y(t) = -2t + 4B\,(t)\,.$

(ii) $Y(t) = \int_0^t G(s)ds + \int_0^t K(s)dN\,(s)\,$, onde N é um processo de Poisson com intensidade λ e com medida de Lévy associada $\nu\,(dx) = \lambda\delta_1\,(x)$, especificando para o caso em que $G(s) = -\lambda\,(e - 1)$ e $K(s) = 1$.

(2 valores)