Mestrado em Matemática Financeira

Processos de Lévy e aplicações

Exame - Época Normal

Duração: 2 horas

14 de Janeiro de 2013

1. Considere um processo de Lévy Z_t com características (μ, A, ν).

(a) Enuncie a condição que a medida de Lévy ν deve satisfazer em geral e quais as condições que devem ser satisfeitas para que o processo:

(i) tenha trajectórias de variação finita.

(ii) tenha trajectórias de variação infinita.

(iii) tenha actividade infinita

(iv) seja um subordinador

(v) tenha momentos finitos de todas as ordens

(b) Considere que $\mu = 0$, $A = 0$ e

$$\nu(dx) = \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

Será que neste caso, o processo Z_t é um processo de Lévy? Justifique. Em caso afirmativo, que tipo de processo de Lévy? E qual o expoente característico associado a este processo e qual a função densidade de probabilidade da variável aleatória Z_1? Discuta ainda a "lei de decaimento" das caudas associadas a esta distribuição.

2. Considere o processo "Variance-Gamma" L_t

(a) (i) Defina este processo usando um subordinador adequado e supondo que a distribuição "Variance Gamma" associada $V(\sigma, b, \theta)$ é tal que $\sigma = 1$ e $\theta = 0$. (ii) Defina também o mesmo processo mas usando dois subordinadores adequados e (iii) finalmente apresente a medida de Lévy associada ao processo, descrevendo brevemente como é o seu decaimento quando $x \to \infty$.

(b) Mostre que a função característica do processo é

$$\Phi_{L(t)}(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuL(t)}\right] = \left(1 + \frac{u^2}{2b}\right)^{-at},$$

onde a e b são parâmetros adequados associados ao subordinador usado em (a).

3. Considere uma distribuição infinitamente divisível com características (m, A, ν).

(a) Mostre que

$$\lim_{u\to 0}\left|\int_{-1}^{1}\left(e^{iyu} - 1 - iyu\right)\nu(dy) + \int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)}\left(e^{iyu} - 1\right)\nu(dy)\right| = 0.$$

(b) Mostre que a distribuição exponencial com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$$

e função característica

$$\phi(u) = \frac{\theta}{\theta - iu}$$

é infinitamente divisível.

Sugestão: Note que a função característica de uma distribuição Gamma-(α, β) é $\phi(u) = \frac{1}{(1-iu/\alpha)^{\beta}}$.

4. Apresente 4 exemplos de processos de Lévy (todos diferentes) que sejam também martingalas e dado um processo de Lévy $Y(t)$ com expoente característico $\eta(u)$, mostre que o processo

$$\exp\{iuY(t) - t\eta(u)\}$$

é também uma martingala.

5. Considere um mercado em que o preço do activo com risco S_t é modelado pela equação diferencial estocástica

$$dS(t) = S(t-)\, dZ(t),$$

onde $Z(t) = \sigma X(t) + \mu t$ e $X(t)$ é um processo de Lévy com decomposição

$$X(t) = mt + kB(t) + \int_c^{+\infty} x \widetilde{N}(t, dx),$$

com $k \geq 0$, $m \geq 0$ e $c < -1$. Assuma que a taxa de juro sem risco é $r > 0$.

(a) Qual a condição que as constantes σ, μ, k, m e r devem satisfazer para que o processo de preço descontado do activo sem risco seja uma martingala relativamente a uma medida equivalente $\mathbb{Q}$? Explique também porque é que este modelo de mercado é, em geral, incompleto.

(b) Determine a condição anterior e discuta a completude do mercado nos casos em que:

(i) o processo X é um movimento Browniano $B(t)$;

(ii) $X = mt + B(t) + N(t)$, onde N é um processo de Poisson de intensidade λ e independente de B.

6. Seja $X(t)$ um processo integral estocástico do tipo Lévy com diferencial $dX(t) = \alpha(t)dt + \sigma(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \gamma(t,x)\, \widetilde{N}(dt, dx)$. Defina-se $Y(t) = \cos(X(t))$. Determine $a(t)$, $b(t)$ e $c(t,x)$ tal que

$$dY(t) = a(t)dt + b(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} c(t,x)\, \widetilde{N}(dt, dx).$$