Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2012/2013
Época de Recurso: 29 de Janeiro de 2013
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{e^2} < \frac{1}{e^{x+x^2}} \right\}$ e $B = \left\{ 2(-1)^n + \frac{(-1)^{n(n+1)}(2n+2)}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

(a) Indique, caso existam, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de B.

(b) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos e indique o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cup B$ e o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cap B$.

(c) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\forall \epsilon > 0\ \ B \backslash \{5\} \cap]5-\epsilon, 5+\epsilon[\neq \emptyset$;

ii. $\exists \epsilon > 0 :\ \ ]1-\epsilon, 1+\epsilon[\subseteq \mathbb{R} \backslash \mathbb{B}$;

(3,0) 2. (a) Prove, por indução matemática, que $\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Calcule a área da figura plana limitada, por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e o gráfico da função $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$.

(4,5) 3. Dado $a \in \mathbb{R}$ considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x > 0 \\ a & \text{se } x = 0 \\ \displaystyle\int_x^0 (t \cos t) dt & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Estude, em função do valor de a, a continuidade da função f.

(b) Determine, caso exista, um valor para $a \in \mathbb{R}$ de forma a que $f \in C^1(\mathbb{R})$.

(c) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa $(-\pi)$.

(d) Indique o valor de $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(3,5) 4. (a) Prove que a equação $5x + \cos x = 0$ tem uma e apenas uma solução em $\mathbb{R}$.

(b) Calcule $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} (\tan(x))^{\tan(2x)}$.

(2,0) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin^2(x) + \sqrt{x} \sin^2(x)}{x^\alpha + x^{\alpha+3}} dx$$

(2,5) 6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que verifica a seguinte igualdade

$$f\left(\frac{1-n}{2-n}\right) = \frac{1+n}{2-n},$$

para todo $n \neq 2$. Sabendo que f é diferenciável no ponto 1, determine $f(1)$ e $f'(1)$.