Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2011/2012
Época Normal: 24 de Janeiro de 2012
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{\sin\left((-1)^n\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n+1}\right)\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} : \ln(2x^2+x) < 0\right\}$.

(a) Escreva o conjunto B como intervalo ou união de intervalos e indique o interior e a fronteira de $B \cap \mathbb{Q}$.

(b) Indique o conjunto dos majorantes e o máximo, caso exista, do conjunto A.

(c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists y \in B : \forall x \in B \ x \leq y$$

(3,0) 2. (a) Utilizando o princípio da indução matemática, prove que $\dfrac{2^n}{n!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$, para todo $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Utilize o resultado anterior para calcular o limite de $\dfrac{2^n}{n!}$.

(2,5) 3. Calcule a função f tal que $f'(x) = 2x\arctan(x)$ que verifica $f(1) = 0$.

(4,0) 4. Dado $k \in \mathbb{R}$, considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(\frac{1}{x}) + \frac{\pi}{2}}{x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] k + \displaystyle\int_0^x \sin t e^{\cos t} dt & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Determine, caso exista, um valor para k de forma a que $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists^1 c \in]0, 2\pi[: f''(c) = 0.$$

(c) Escreva o polinómio de Taylor de 2ª ordem da função f, em torno do ponto $\frac{\pi}{2}$.

(2,5) 5. Prove que $x^2 = x\sin(x) + \cos(x)$ tem exactamente duas soluções reais.

(2,0) 6. Dado $\beta > 0$ estude, em função do parâmetro β a convergência do seguinte integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x-1)}{(x^{\beta+2} - x^{\beta})\sqrt{(x-1)^3}} dx.$$

(2,0) 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$ para a qual se tem $f(n+1) = \frac{1}{n} + f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supondo que existe $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$, calcule o valor desse limite.

Mostre, com um exemplo, que é possível não existir limite.