□

Exemplo 5.21. Seja $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias IID tais que $X_n \in \{0, 1\}$ e $\alpha = P(X_n = 1)$. Forme-se a soma,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \,,$$

e considere-se o tempo de paragem,

$$\tau_k = \min \{n \in \mathbb{N}\colon S_n = k\} \,.$$

Uma vez que $P(\tau_k < \infty)$ temos pela equação de Wald que

$$k = E(S_{\tau_k}) = \alpha E(\tau_k) \,.$$

Logo, $E(\tau_k) = \frac{k}{\alpha}$.

Exemplo 5.22. Retomando o Exemplo 5.19, desejamos calcular $E(\tau)$. A equação de Wald não ajuda uma vez que $E(S_\tau) = 0$ e $\mu = 0$. No entanto se considerarmos uma nova sucessão $Z_n = S_n^2 - n$ é possível calcular $E(\tau)$. Note-se que Z_n é uma martingala, logo $Z_{\tau \wedge n}$ é também uma martingala. Logo,

$$0 = E(Z_1) = E(Z_{\tau\wedge n}) = E(S_{\tau\wedge n}^2 - \tau \wedge n) \,.$$

Portanto,

$$E(S_{\tau\wedge n}^2) = E(\tau \wedge n) \,.$$

Como $\tau \wedge n \nearrow \tau$ e $S_{\tau\wedge n} \to S_\tau$ onde $S_{\tau\wedge n}$ é uma sucessão limitada, então pelo teorema da convergência monótona e da convergência limitada temos que

$$E(S_\tau^2) = E(\tau) \,.$$

Mas como, $E(S_\tau^2) = a^2 \frac{b}{b+a} + b^2(1 - \frac{b}{b+a}) = ab$, logo,

$$E(\tau) = ab \,.$$

Teorema 5.23. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma supermartingala (submartingala) relativamente a uma filtração $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ e τ um tempo de paragem. Se $P(\tau < \infty) = 1$ e $(X_{\tau\wedge n})_{n\geq 1}$ é uniformemente integrável então $E(X_\tau) \leq E(X_1)$ ($E(X_\tau) \geq E(X_1)$).*

Demonstração. Deixa-se como exercício. □

5.1.4 Convergência de martingalas

O resultado que se segue estabelece a convergência de uma martingala com probabilidade 1 desde que a sucessão $E(|X_n|)$ seja limitada. Sua demonstração pode ser vista em [1].

Teorema 5.24. *Seja X_n uma martingala tal que $E(|X_n|) \leq M$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ e algum $M \geq 0$. Então existe uma variável aleatória X_∞ integrável tal que*

$$X_\infty = \lim_{n \to \infty} X_n \,, \quad P - q.c.$$

Como corolário tem-se o seguinte resultado.

Corolário 5.25. *Se X_n é uma martingala não negativa então existe uma variável aleatória X_∞ tal que*

$$X_\infty = \lim_{n \to \infty} X_n \,, \quad P - q.c.$$

Demonstração. Uma vez que X_n é não negativa tem-se

$$E(|X_n|) = E(X_n) = E(X_1) \,, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

O resultado segue do teorema anterior. □

Exemplo 5.26. Considere novamento o jogo honesto,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \,,$$

onde X_n é uma sucessão de variáveis aleatórias IID tais que $X_n \in \{-1, 1\}$ com igual probabilidade. Suponha que o jogador dispõe de crédito limitado, a euros. Portanto, é obrigado a abandonar o jogo quando o seu prejuízo atingir esse limite,

$$\tau = \min \{n \geq 1 : S_n = -a\} \,.$$

Logo, a martingala $S_{\tau \wedge n} + a$ é não negativa e segue do corolário anterior que

$$S_\tau = \lim_{n \to \infty} S_{\tau \wedge n} \,, \quad P - \text{q.c.}$$

Uma vez que

$$|S_{n+1} - S_n| = 1 \,, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

então τ é finito P-q.c., caso contrário a sucessão $S_{\tau \wedge n}$ não seria convergente P-q.c.

Conclui-se assim que com probabilidade 1, o jogador será obrigado a abandonar o jogo ao fim de um número finito de jogadas.

Exemplo 5.27. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias IID tais que $X_n \in \{0, 2\}$ com igual probabilidade. Uma vez que $E(X_n) = 1$ então

$$Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

é uma martingala. Como $Z_n \geq 0$ então aplicando o corolário anterior tem-se

$$Z_\infty = \lim_{n\to\infty} Z_n\,, \quad P - \text{q.c.}$$

De facto, $Z_\infty = 0$, P-q.c.

6 Processos Estocásticos

6.1 Definições gerais

Definição 6.1. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Um **processo estocástico** X é uma colecção $X = \{X_t : t \in T\}$ de variáveis aleatórias $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ indexadas por um parâmetro $t \in T \subset \mathbb{R}$.

Quando o **conjunto dos parâmetros** T é um conjunto numerável, tipicamente $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ou $T = \mathbb{Z}$, então o processo estocástico é de **parâmetro ou tempo discreto**.

Observação 6.1. Neste contexto, uma sucessão de variáveis aleatórias é um processo estocástico de tempo discreto.

Quando T é um intervalo, tipicamente $T = [0, \infty[$ ou $T = \mathbb{R}$, então o processo estocástico é de **parâmetro ou tempo contínuo**. Ao conjunto dos valores que as variáveis aleatórias X_t podem tomar designa-se por E, o **conjunto dos estados do processo estocástico**. Quando o conjunto dos estados E é finito ou numerável então o processo estocástico diz-se **discreto**, caso contrário diz-se **contínuo**.

Observação 6.2. É usual escrever-se $X(t)$ quando o processo é de tempo contínuo.

Para cada $\omega \in \Omega$ a função

$$t \mapsto X_t(\omega)\,, \quad t \in T$$

é designada por **trajectória** ou **realização** do processo. Uma trajectória de um processo referente a um período limitado de tempo é designada por **série temporal**.

A **lei de probabilidade** do processo estocástico é dada por todas as distribuições de probabilidade conjuntas de um número finito de variáveis aleatórias $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. Portanto, a lei de probabilidade do processo consiste na família de funções de distribuição de probabilidade conjuntas,

$$F_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n)\,,$$

onde $t_1, \ldots, t_n$ são quaisquer conjunto finito de índices pertencentes a T e $n \geq 1$.

Definição 6.2. Dois processos estocásticos $X = \{X_t : t \in T\}$ e $Y = \{Y_t : t \in T\}$ dizem-se **identicamente distribuídos** sse tiverem a mesma família de funções de distribuição de probabilidade conjuntas, ou seja,

$$F_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})} = F_{(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n})}$$

para todo o conjunto finito de índices $t_1, \ldots, t_n \in T$ e $n \in \mathbb{N}$.

Definição 6.3. Dois processos estocásticos $X = \{X_t : t \in T\}$ e $Y = \{Y_t : t \in T\}$ dizem-se **independentes** sse os vectores aleatórios

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \quad \text{e} \quad (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$$

são independentes para quaisquer $t_1, \ldots, t_n \in T$ e $n \in \mathbb{N}$.

Observação 6.3. Note-se que dois vectores aleatórios são independentes sse as suas σ-álgebras induzidas são independentes.

Exemplo 6.4. Considere uma sucessão $(X_n)_{n\geq 1}$ de variáveis aleatórias independentes. O processo estocástico de tempo discreto

$$S = \{S_n = X_1 + \cdots + X_n \colon n \in \mathbb{N}\}\ ,$$

é designado por passeio aleatório. A variável aleatória S_n por ser interpretada como o deslocamento até ao instante n, podendo ser escrita

$$S_n = S_{n-1} + X_n\,.$$

6.2 Estacionariedade

Em termos gerais, um processo estacionário é um processo cujas características de aleatoriedade não se alteram ao longo do tempo. Existem diversas definições de estacionariedade.

Definição 6.4. Um processo X_t diz-se **estacionário em média** sse

$$E(X_t) = \mu\,, \quad \forall\, t \in T\,.$$

Num processo estacionário em média o seu valor esperado não evolui ao longo do tempo.

Definição 6.5. Um processo X_t diz-se de **covariâncias estacionárias** sse

1. Os momentos de segunda ordem são finitos, isto é
$$E(X_t^2) < \infty\,, \quad \forall t \in T\,,$$
2. Existe uma função $\gamma : T \to \mathbb{R}$ tal que
$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \gamma(t-s)\,, \quad \forall s \leq t\,.$$

Observação 6.5. Num processo X_t com covariâncias estacionárias tem-se
$$\mathrm{Var}(X_t) = \gamma(0)\,.$$
Ou seja, a variância do processo não se altera ao longo do tempo.

Definição 6.6. Um processo X_t diz-se **estacionário até à segunda ordem** sse for estacionário em média e tiver covariâncias estacionárias.

Uma definição de estacionariedade mais forte que as anteriores é a seguinte.

Definição 6.7. Um processo X_t diz-se **fortemente ou estritamente estacionário de ordem** $k \in \mathbb{N}$ sse para quaisquer instantes $t_1, \ldots, t_k \in T$ e qualquer h tal que $t_i + h \in T$, $i = 1, \ldots, k$, os vectores aleatórios $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ e $(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_k+h})$ são identicamente distribuídos.

Chegamos assim à definição de estacionariedade mais forte.

Definição 6.8. Um processo é **fortemente ou estritamente estacionário** sse for fortemente estacionário de ordem k para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Esta definição de estacionariedade implica todas as outras. Adicionalmente, num processo fortemente estacionário todas as variáveis aleatórias X_t tem a mesma distribuição. Analogamente, todos os pares (X_t, X_s) são identicamente distribuídos desde os instantes estejam igualmente espaçados no tempo.

Exemplo 6.6. Qualquer sucessão de variáveis aleatórias IID é um processo fortemente estacionário.

Exemplo 6.7. Considere um processo estocástico $\{X_n : n = 1, 2, \ldots\}$ tal que $E(X_n) = 0$ e $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ para todo $n \geq 1$ e $\mathrm{Cov}(X_n, X_m) = 0$ para $n \neq m$. Este processo é estacionário até à segunda ordem, sendo usualmente designado por **ruído branco**.

Exemplo 6.8. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias IID, $\theta \in \mathbb{R}$ e $Y_n = X_n - \theta X_{n-1}$. O processo estocástico

$$Y = \{Y_n \colon n \in \mathbb{N}\}$$

é estacionário até à segunda ordem. É usualmente designado por **processo de médias móveis de primeira ordem**, MA(1).

6.3 Processo com incrementos estacionários e independentes

Definição 6.9. Um processo estocástico X_t diz-se de:

- **incrementos independentes** sse para quaisquer instantes $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ as variáveis aleatórias

  $$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

  são independentes.
- **incrementos estacionários** se para quaisquer instantes $t, s \in T$ e $h > 0$ tal que $t + h, s + h \in T$, as variáveis aleatórias

  $$X_{t+h} - X_{s+h} \quad \text{e} \quad X_t - X_s$$

  são identicamente distribuídas.

Exercício 53. Mostre que um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$ tal que $X_0 = 0$ tem incrementos estacionários sse para todo $t \geq s$ tal que $t - s \in T$ as variáveis aleatórias $X_t - X_s$ e X_{t-s} são identicamente distribuídas.

Como o seguinte resultado demonstra é fácil caraterizar os processos estocásticos em tempo discreto com incrementos independentes e estacionários.

Proposição 6.9. *Uma sucessão de variáveis aleatórias* $(X_0, X_1, X_2, \ldots)$ *tem incrementos independentes e estacionários sse existir uma sucessão de variáveis aleatórias* $(U_1, U_2, \ldots)$ *IID tal que*

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Demonstração. Se $(X_0, X_1, X_2, \ldots)$ tem incrementos independentes e estacionários então seja $U_n = X_n - X_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Segue da construção que a sucessão $(U_1, U_2, \ldots)$ é IID e

$$X_n = U_1 + \cdots + U_n\,.$$