Se por outro lado $(U_1, U_2, \ldots)$ é IID então mostremos que $X_n = U_1 + \cdots + U_n$ tem incrementos independentes e estacionários. De facto, dados $n > m$ temos que

$$X_n - X_m = U_{m+1} + \cdots + U_n \,.$$

Tome-se quaisquer $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Uma vez que $U_1, U_2, \ldots$ são IID segue que os incrementos

$$X_{n_2} - X_{n_1}, X_{n_3} - X_{n_2}, \ldots, X_{n_k} - X_{n_{k-1}}$$

são independentes. A estacionariedade prova-se de maneira semelhante. $\square$

Num processo estacionário $\{X_t : t \in T\}$ com incrementos independentes e estacionários, se sabemos a função de densidade de probabilidade de X_t para todo $t \in T$ então podemos determinar a função de densidade conjunta $f_{t_1,\ldots,t_n}$ de qualquer vector aleatório $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

Proposição 6.10. *Seja $X = \{X_t : t \in T\}$ um processo estacionário com incrementos independentes e estacionários tal que $X_0 = 0$ e X_t tem função densidade de probabilidade f_t para todo $t \in T$. Se $t_i \in T$, $i = 1, \ldots, n$, tal que*

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

então

$$f_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots f_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) \,.$$

Demonstração. Seja $U_1 = X_{t_1}$ e $U_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ para $i = 2, \ldots, n$. Então

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) = (U_1, U_1 + U_2, \ldots, U_1 + U_2 + \cdots + U_n) \,.$$

Segue de o processo ter incrementos estacionários e independentes que as variáveis aleatórias $U_1, U_2, \ldots, U_n$ são independentes e têm funções de densidade marginais $f_{t_1}, f_{t_2 - t_1} \ldots, f_{t_n - t_{n-1}}$. Logo,

$$f_{U_1,\ldots,U_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2 - t_1}(x_2) \cdots f_{t_n - t_{n-1}}(x_n) \,.$$

Seja $X = (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$, $U = (U_1, \ldots, U_2)$ e considere a função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$h(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \,.$$

Segue do teorema da mudança de variável que,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g\, dp_X &= \int_{\mathbb{R}^n} g \circ h\, dp_U \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g \circ h \cdot f_U\, dm_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n) f_U(x_1, \ldots, x_n)\, dm_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_n) f_U(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})\, dm_n
\end{aligned}$$

Como a função g é arbitrária concluímos que

$$\frac{dp_X}{dm_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_U(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}) .$$

□

Proposição 6.11. *Seja $X = \{X_t : t \in T\}$ um processo estocástico com incrementos independentes e estacionários tal que $X_0 = 0$ e $E(X_t^2) < \infty$ para todo $t \in T$. Então existem constantes $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \geq 0$ tal que*

1. *$E(X_t) = \mu t$ para $t \in T$.*
2. *$\operatorname{Cov}(X_s, X_t) = \sigma^2 \min\{s, t\}$ para todo $t, s \in T^2$.*

Demonstração.

1. Define-se a função $g(t) = E(X_t)$. Note-se que dados $t, s \in T$ tal que $t + s \in T$, as variáveis aleatórias $X_{t+s} - X_s$ e $X_t - X_0$ são identicamente distribuídas. Logo,

$$\begin{aligned}
g(t+s) = E(X_{t+s}) &= E(X_{t+s} - X_s + X_s) \\
&= E(X_{t+s} - X_s) + E(X_s) \\
&= E(X_t - X_0) + E(X_s) \\
&= E(X_t) + E(X_s) \\
&= g(t) + g(s) .
\end{aligned}$$

   Portanto, g é uma função aditiva. É possível provar que as únicas funções aditivas e limitadas em intervalos limitados são as funções lineares $g(t) = \mu t$ para algum $\mu \in \mathbb{R}$ (ver [1]). Logo, $E(X_t) = \mu t$.
2. Demonstração análoga à anterior.

□

Exercício 54. Seja $X = \{X_t : t \in T\}$ um processo estocástico com incrementos independentes e estacionários tal que $X_0 = 0$ e $E(X_t^2) < \infty$ para todo $t \in T$. Mostre que existe uma constante positiva σ tal que

$$\operatorname{Var}(X_t - X_s) = \sigma^2 |t - s| .$$

6.4 Processo de Markov

Um processo de Markov é um processo estocástico em que o futuro é independente do passado quando se conhece o presente.

Definição 6.10. Um processo estocástico $X = \{X_t \colon t \in T\}$ é um **processo de Markov** se satisfizer a **propriedade de Markov**,

$$P(X_t \in B|X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = P(X_t \in B|X_{t_n}),$$

sempre que $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t \in T$ e para todo o Boreliano B de $\mathbb{R}$.

Observação 6.12. Note-se que $P(X \in B|Y) = P(X^{-1}(B)|\sigma(Y))$ é a probabilidade condicionada do acontecimento $\{X \in B\}$ dado a informação de Y, como foi definida anteriormente.

Exemplo 6.13 (Passeio aleatório é um processo de Markov)**.** Considere-se o passeio aleatório

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

onde $X_1, X_2, \dots$ são variáveis aleatórias IID tais que $X_i \in \{-1, 1\}$. Uma vez que

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1},$$

onde X_{n+1} é independente de S_i, $i = 1, \dots, n$ temos que

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = s|S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) &= P(S_n + X_{n+1} = s|S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) \\ &= P(X_{n+1} = s - s_n|S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) \\ &= P(X_{n+1} = s - s_n). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = s|S_n = s_n) &= P(S_n + X_{n+1} = s|S_n = s_n) \\ &= P(X_{n+1} = s - s_n|S_n = s_n) \\ &= P(X_{n+1} = s - s_n). \end{aligned}$$

Logo,

$$P(S_{n+1} = s|S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) = P(S_{n+1} = s|S_n = s_n)$$

de onde se pode verificar com facilidade a propriedade de Markov.

Generalizando o exemplo anterior obtem-se o seguinte resultado.

Proposição 6.14. *Um processo estocástico $X = \{X_t : t \in T\}$ de incrementos independentes com $T = [0, \infty[$ ou $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ é um processo de Markov.*

Demonstração. Deixa-se como exercício. □

Exemplo 6.15. No entanto existem processos não Markovianos, como é o caso do **processo autoregressivo de ordem** 2, designado por AR(2),

$$Y_n = a_1 Y_{n-1} + a_2 Y_{n-2} + X_n \, ,$$

onde X_n é uma sucessão de variáveis IID.

Quando o conjunto de estados do processo de Markov X é finito ou numerável então diz-se que X é uma **cadeia de Markov**. Note-se que dependendo da natureza do conjunto dos parâmetros, uma cadeia de Markov pode ser a **tempo discreto ou contínuo**. Quando o conjunto de estados e dos parâmetros é um intervalo diz-se que X é um **processo de difusão**.

6.5 Processo de Wiener

O processo de Wiener é um processo de difusão usado para modelar o **movimento Browniano**, isto é, o movimento descrito por uma partícula imersa num líquido quando esta colide com as moléculas do líquido. O processo de Wiener é também amplamente utilizado em matemática financeira.

Definição 6.11. Um processo estocástico a tempo contínuo $W = \{W_t : t \in [0, \infty[\}$ diz-se um **processo de Wiener** sse:

1. $W_0 = 0$, P-q.c.
2. as trajectórias $t \mapsto W_t$ são contínuas P-q.c.
3. para quaisquer $0 < t_1 < \cdots < t_n$ o vector aleatório $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ tem função de densidade conjunta,

   $$f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{t_1}(x_1) p_{t_2-t_1}(x_2-x_1) \cdots p_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1}) \, ,$$

   onde

   $$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \, ,$$

   é a função de densidade da distribuição Gaussiana.

Exercício 55. Mostre que a função de densidade de W_t é

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \, ,$$

e calcule $E(W_t)$ e $\mathrm{Var}(W_t)$.

Proposição 6.16. *Para quaisquer $0 \leq s < t$ o incremento $W_t - W_s$ tem distribuição normal com valor esperado 0 e variância $t - s$.*

Demonstração. Segue da terceira condição da definição do processo de Wiener que a função de densidade conjunta de (W_s, W_t) é

$$f_{s,t}(x,y) = p_s(x)p_{t-s}(y-x)\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P(W_t - W_s \leq z) &= \int_{\{y-x\leq z\}} p_s(x)p_{t-s}(y-x)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z+x} p_s(x)p_{t-s}(y-x)\,dydx \\
&= \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x)p_{t-s}(y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{z} p_{t-s}(y)\,dy
\end{aligned}$$

Logo,

$$f_{t-s}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}}$$

□

Proposição 6.17. *Um processo de Wiener tem incrementos independentes.*

Demonstração. Para quaisquer $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ queremos mostrar que os incrementos,

$$W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

são independentes. É possível demonstrar que se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias que seguem uma distribuição normal então são independentes sse não são correlacionadas, ou seja, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Portanto, como o valor esperado dos incrementos é nulo, é suficiente mostrar que,

$$E\left[(W_u - W_t)(W_s - W_r)\right] = 0\,, \quad t \leq u \leq r \leq s\,.$$

Mas para $s \leq t$ temos que,

$$\begin{aligned}
E(W_sW_t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp_s(x)p_{t-s}(y-x)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_s(x)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} yp_{t-s}(y-x)\,dy\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2p_s(x)\,dx = s\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
E\left[(W_u - W_t)(W_s - W_r)\right] &= E(W_u W_s) - E(W_u W_r) - E(W_t W_s) + E(W_t W_r) \\
&= u - u - t + t = 0
\end{aligned}
$$

□

Segue das proposições anteriores que,

Corolário 6.18. *Um processo de Wiener tem incrementos independentes e estacionários.*

Exercício 56. Mostre que um processo de Wiener é estacionário em média, mas não tem covariâncias estacionárias.

Referências

[1] Robert B. Ash, Catherine A. Doléans-Dade, *Probability and Measure Theory*. Academic Press 2nd Edition, 1999.

[2] Daniel Müller, *Probabilidade e processos estocásticos: uma abordagem rigorosa com vista aos modelos em finanças*. Coimbra, Almedina, 2011.