ISEG | ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 1º semestre, EEN | 14. 01. 15

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**__________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E[(X-\mu)^2]=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$;

$$\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$; $S'^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n-1}$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2}, s<\dfrac{1}{2}$; $\gamma_1=\sqrt{8/n}$; $\gamma_2=3+12/n$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

1. Seja $\{A_1,A_2,A_3\}$ uma partição de Ω, com $P(A_i)>0$, $i=1,2,3$, e B e C dois acontecimentos de Ω:

	V	F
$P(B)=P(B\mid A_1)\times P(A_1)+P(B\mid A_2)\times P(A_2)+P(B\mid A_3)\times P(A_3)$.	X	
Sejam B e C acontecimentos com probabilidade positiva e $C\subset B$. Então $\mathrm{P}(B\mid C)=1$.	X	
Sejam B e C acontecimentos tais que $P(C)=0{,}6$; $P(B)=0.4$ e $P(B\cup C)=0{,}76$. Então os acontecimentos B e C não são independentes.		X
Os acontecimentos A_1, A_2 e A_3 não são mutuamente exclusivos.		X

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$, f.d.p ou f.p. *f(x)* e $a\in\Re$.

	V	F
Se X for discreta, $f(x)$ tem contradomínio em $\Re$ e domínio em (0;1).		X
Sejam a e c números reais. Se X é uma variável aleatória contínua então $P(a<X<c)=F_X(c)-F_X(a),\quad \forall a,c\in\mathbb{R}$.	X	
Se X for variável aleatória mista, então $0\leq F(x)\leq 1$.	X	
Se X for contínua com $f(x)>0$ para $x>0$ e fizer $Y=\begin{cases}0 & X\leq 0\\ 1 & X>0\end{cases}$, então Y já não é uma variável aleatória.		X

3. Seja X uma variável aleatória com *E(X)=* μ e *Var(X)=* σ^2.

	V	F
$(X-\mu)/\sigma$ tem média nula e variância unitária.	X	
O coeficiente de variação de X não pode ser negativo.		X
Se o coeficitente de assimetria de X for nulo então μ coincide com a mediana.	X	
$Var(X-\mu)=\sigma^2$.	X	

4. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$:

	V	F
Se $F_{X,Y}(x,y)$ for contínua, $P(a < X < b; c < Y < d) = F(b,\ d) - F(a,\ d) - F(b,\ c) + F(a,\ c)$, $a < b; c < d$.	X	
Se X e Y forem independentes então $E(XY) = E(X)E(Y)$.	X	
Se $Cov(X,Y) = 0$ então garante-se que X e Y são independentes se $F_{X,Y}(x,y)$ for discreta.		X
Se X e Y forem independentes então a distribuição condicionada de X dado $Y = y$ coincide com a distribuição marginal de X.	X	

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma população X com média μ e variância σ^2. Considere ainda a média e variância amostrais, respectivamente $\bar{X}$ e S^2:

	V	F
As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são i.i.d.	X	
$Var(\bar{X}) = \sigma^2$.		X
A média da amostra coincide em média com a média do universo.	X	
$E(S^2) = \sigma^2$.		X

6. Sendo A um acontecimento definido no espaço Ω. Utilizando os axiomas da medida de probabilidade demonstre que $P(A) \leq 1$. [Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar, se preferir]. **[Cotação: 15]**

Propriedade 6, ver livro, pag. 66.

7. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual extraída de um universo X de Poisson. Encontre a distribuição da amostra. Justifique todos os passos. **[Cotação: 15]**

$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$, justificando os passos.

Nome:____**Número:**_________

Espaço reservado para classificações

1.a) (10)	**2 a)(15)**	**3.a) (10)**	**4 a) (10)**	**T:**
1.b) (20)	**2 b)(15)**	**3.b) (20)**	**4 b) (20)**	**P:**

1. O gerente de uma estação de serviço vai instalar novas secções de lavagem de carros. Para determinar o número de secções a instalar, ele decidiu que, no período de maior afluência, a probabilidade de um carro não ser atendido de imediato não pode exceder 10%. Sabe-se que, no período em questão, o número de chegadas de carros para lavagem é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de média 5. Sabe-se ainda que cada secção de lavagem só pode atender uma viatura no período em questão.

a) Qual o número mínimo de secções que devem funcionar nesse período? (*Assinale com uma **cruz** no quadrado adequado*)

6 ☐ 7 ☐ 8 X 9 ☐

b) Se o período de maior afluência corresponder a um período de 3 horas e no início desse período existir uma fila de 5 carros, determine a probabilidade de passada uma hora, a 5ª viatura ter sido atendida.

R: Seja *W* o tempo (em horas) de espera para atendimento de 5 carros em fila. *W*~Gama(5;5/5).

$$\Pr(W > 1) = \Pr(\chi^2_{(10)} > 10/3) \approx 0.9725\,.$$

2. A diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro numa certa paragem, em minutos, é uma variável aleatória, X, cuja densidade de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} k & 0 < x < 1 \\ \dfrac{6}{5x^2} & 1 \le x < 5 \end{cases}$$

a) Determine k e a função de distribuição da variável aleatória X.

$$k\!: \int_0^1 k\,dx + \frac{6}{5}\int_1^5 x^{-2}dx = 1 \Leftrightarrow k = 1/25.$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{25}, & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{25} + \left(\dfrac{6}{5}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x}\right), & 1 \le x < 5 \\ 1 & x \ge 5 \end{cases}$$

b) Foi seleccionada uma amostra aleatória de 9 passageiros que esperam pelo autocarro nessa paragem. Qual a probabilidade de o passageiro que mais tempo esperou pelo autocarro, tenha esperado mais de 2 minutos em relação à tabela?

$$P(Max\,\{X_i\} > 2) = 1 - \left(F_{(X)}(2)\right)^9 = 1 - 0.018.$$

3. Considere a variável aleatória bidimensional (X, Y), representando o número de unidades vendidas do equipamento 1 e 2, respectivamente, de uma empresa de certa industria. A função de probabilidade conjunta é a seguinte:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	0.05	0.10	0.10	0.05
1	0.10	0.10	0.05	0.03
2	0.10	0.08	0.05	0.03
3	0.05	0.05	0.04	0.02

a) Sabendo que não foram vendidas unidades do equipamento 1, qual o valor esperado de vendas do equipamento 2? (*Assinale com uma* ***cruz*** *no quadrado adequado*)

1.35 ☐ 1.50 X 1.66 ☐ 1.242 ☐

b) Determine a probabilidade de, no mínimo, se vender um total de duas unidades.

$W = X + Y$, $W = 0,1,\ldots,6$, o total de unidades vendidas, $\Pr(W \geq 2) = 0.75$

w:	0	1	2	3	4	5	6
$f_W(w)$	0,05	0,2	0,3	0,23	0,13	0,07	0,02

4. Com base na informação recolhida em anos anteriores, sabe-se que é de 0.25 a probabilidade de um indivíduo, residente numa determinada região, aderir às campanhas de vacinação anual contra a gripe.

a) De um grupo de 10 pessoas qual a probabilidade de mais de 6 aderirem às campanhas de vacinação anual contra a gripe?

0.0035 X 0.9838 ☐ 0.0197 ☐ 0.9416 ☐

b) Sabendo que nessa região residem 123 mil pessoas, qual o número mínimo de vacinas que os serviços médicos devem dispor para responderem às necessidades de vacinação com uma probabilidade de pelo menos 95%?

Seja *X* o número de pessoas que adere à campanha, de uma população de 123000 pessoas.

$X \sim B(123000; 0.25)$, aprox. $N(123000(0.25); 123000(0.25)(0.75))$.
k: $\Phi\left(\frac{k-0.5-30750}{\sqrt{23062.5}}\right) \leq 0.05$; $k \geq -1.645(151.863) + 0.5 + 30750$, $k \geq 30501$ (com correcção de continuidade).