1ª Parte - Teórica – 40 minutos – Exame Nº 12143

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**__________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-\mu)^2]=E(X^2)-\mu^2;\quad \mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y);$$

$$\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)\ ;\quad \mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)\,;\quad E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right];$$

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\ ;\quad S^2=\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\bar{X}^2\ ;\ S'^2=\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{n-1};\qquad (n-1)S'^2=n\,S^2$$

$$X\sim\chi^2_{(n)}\ \text{então}\ E(X)=n\,;\ \mathrm{Var}(X)=2n\,;\ M_X(s)=(1-2s)^{-n/2},\ s<\frac{1}{2}\ ;\ \gamma_1=\sqrt{8/n}\,;\ \gamma_2=3+12/n$$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

1. Seja $\{A_1,A_2,A_3\}$ uma partição de Ω, com $P(A_i)>0$, $i=1,2,3$, e B e C dois acontecimentos de Ω:

	V	F
$P(B)=P(A_1\mid B)´\ P(A_1)+P(A_2\mid B)´\ P(A_2)+P(A_3\mid B)´\ P(A_3)$.		X
Sejam B e C acontecimentos com probabilidade positiva e C Ì B. Então $\mathrm{P}(C\mid B)=1$.		X
$P[(C\cap B)\cup(C\cap\bar{B})]=P(C)$	X	
Os acontecimentos A_1, A_2 e A_3 são independentes.		X

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$, f.d.p ou f.p. $f(x)$ e $a,b\in\Re$.

	V	F
Se X for discreta, $P(X\in[a,b))=F(b)-F(a),\ \ a<b$.		X
Se X é uma variável aleatória contínua então $P(b<X<a)=F_X(b)-F_X(a),\ \ a>b$.		X
Se X for variável aleatória mista, então $0\leq f(x)\leq 1,\ \forall x$.		X
Se X for contínua com densidade positiva para $x>0$ apenas, e fizer $Y=\begin{cases}0 & X\leq 0\\ X+3 & X>0\end{cases}$, então Y é uma variável aleatória contínua.	X	

3. Seja X uma variável aleatória com *E(X)=* μ e *Var(X)=* σ^2.

	V	F
$(X-\mu)/\sigma$ tem distribuição $N(0;1)$.		X
A existência de variância implica a existência do coeficiente de assimetria.		X
Sejam, *X* contínua, ξ_α o quantil de ordem α e $\Pr(X>\xi_\alpha)=1/2$. Então ξ_α é a mediana.	X	
$Var(-X)=-\sigma^2$.		X

4. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$:

	V	F
Se $Cov(X,Y)=0$ então garante-se que X e Y são independentes se e só se $F_{X,Y}(x,y)$ for contínua.		x
Se $E(XY)=E(X)E(Y)$ então X e Y são independentes.		x
Se $F_{X,Y}(x,y)$ for discreta, $P(a < X < b; c < Y < d) = F(b,\ d) - F(a,\ d) - F(b,\ c) + F(a,\ c)$, $a<b; c<d$.	x	
Seja $F_{X,Y}(x,y)$ contínua e considere as respectivas funções de densidade conjunta, marginais e condicionadas. A função densidade conjunta $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_{Y\|X}(y) = f_Y(y) \times f_{X\|Y}(x)$.	x	

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n \geq 2$, uma amostra casual simples retirada de uma população X com média μ e variância σ^2. Considere ainda a média e variância amostrais, respectivamente $\bar{X}$ e S^2:

	V	F
A amostra $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ é uma estatística.	x	
A aproximação assintótica $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0,1)$ só é válida se a população for normal.		x
A variância da amostra coincide em média com a variância do universo.		x
$(\bar{X}-\mu)/\sigma$ é uma estatística se μ e σ^2 forem conhecidos.	x	

6. Sejam X uma variável aleatória contínua e

$$\forall x, h \in R, \quad Lim\, P(x+h < X \leq x) = 0 \text{ quando } h \to 0^-,\ h < 0.$$

Argumente sobre a veracidade da afirmação. **[Cotação: 15]**

De forma resumida, $\underset{h\to 0^-}{Lim} P(x+h < X \leq x) = P(X = x) = 0$, porque a v.a. X é contínua.

7. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual de um universo X com função de distribuição $F_X(x)$. Seja ainda $T = \min\{X_i\}$. Obtenha a função de distribuição de T em função de F_X. **[Cotação: 15]**

$$P(\min X_i > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = [1 - F(x)]^n$$
$$\Rightarrow F_T(x) = 1 - [1 - F(x)]^n.$$

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças-1ºSem. 2014-2015 **26. 01. 15**

Exame Época de Recurso

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(15)	2a.(10)	3a.(15)	4a.(20)	T:
1b.(10)	2b.(20)	3b.(20)	4b.(10)	P:

Nota: Nas questões de resposta múltipla, resposta errada desconta 2,5.

1. O João vai para o ISEG num dos seguintes transportes: Autocarro (25% das vezes) , Metro (35% das vezes) ou Bicicleta (40% das vezes). Nos dias que chove o João vai de Metro ou Autocarro com igual probabilidade e **nunca** vai de bicicleta. Admita que num dia ou faz sol ou chove.

a) Qual a percentagem de dias com chuva?

Sejam os acontecimentos *A*, *B*, *M* representando as opções do João pelo Autocarro, Bicicleta ou Metro respetivamente. Analogamente, *S* e *C* representam dia com sol ou chuva, respetivamente.

$$P(M\mid C)=P(A\mid C)=0,5=\frac{P(C\mid A)P(A)}{P(C)}=\frac{P(C\mid M)P(M)}{P(C)}.$$

$P(C)=P(C\mid A)P(A)+P(C\mid M)P(M)+P(C\mid B)P(B)$ Solução indeterminada.

$P(C)=0,5P(C)+0,5P(C)\Leftrightarrow P(C)=P(C)+P(C).$

b) Em 10 dias úteis qual a probabilidade de o João ir de bicicleta em mais de metade dos dias?

Sejam $p=P(B)=0,4$ e *X*: Nº de dias em que o João vai de bicicleta, 10 possíveis. $X\sim B(10;p=0,4), P(X>5)=1-F_X(5)=0,16624$.

2. Admita que durante época de exames, o número de exercícios de estatística que um aluno faz por hora de estudo segue um processo de Poisson com taxa média de 1,5.

a) Qual a probabilidade de em 6 horas de estudo o aluno ter feito 10 ou mais exercícios?

Sejam *X*: Nº de exercícios em 6h de estudo, $X\sim Poisson(9)$. $P(X\geq 10)=1-F_X(9)=0,41259$.

b) Qual a probabilidade de o aluno demorar mais do que 2 horas e 30 minutos a fazer 3 exercícios de estatística?

Seja Y_i o tempo, em horas, entre a resolução do exercício *i* e *i*-1 (exercícios feitos sequencialmente).

$Y_i\sim Gama(1;2/3)\Rightarrow Z=Y_1+Y_2+Y_3\sim Gama(3;2/3). P(Z>2,5)=0,27707.$

3. Considere a seguinte variável aleatória bidimensional com densidade $f_{X,Y}(x,y)$ dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = 6\sqrt{y}\,x^3 \qquad 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1$$

a)

$f_X(x) = \int_0^1 6\sqrt{y}\,x^3 dy = 4x^3,\quad 0 < x < 1.\ F(x) = x^4,\ 0 \le x \le 1.$ P(X>0.2)=0,9984.

b) As variáveis aleatórias X e Y são independentes ? Determine o valor esperado de Y quando X=0,5.Justifique.

$f_Y(y) = \int_0^1 6\sqrt{y}\,x^3 dx = \left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{y},\quad 0 < x < 1. f_X f_Y = f_X f_Y(x)(x)$, São independentes.

Como X e Y são independentes, E[Y|X=0,5] = E[Y].

$E[Y] = \int_0^1 y\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{y}dy = \frac{3}{5}$

4. Admite-se que o valor gasto em compras de Natal pelas famílias de um dado país pode ser aproximado por uma distribuição normal. Sabe-se que na região “A” a média da população é de 1,65 e o desvio padrão 0.5 (em centenas de euros) e na região “B” a média é de 1,45 e o desvio padrão 0.6 (em centenas de euros).

a) Selecionadas aleatoriamente 8 famílias da região A e 6 da região B, qual a probabilidade de se concluir que a média amostral da região A é superior à da região B?

$X_A \sim N(1{,}65; 0{,}5^2),\ \ X_B \sim N(1{,}45; 0{,}6^2), n_A = 8, n_B = 6 \Rightarrow X_A - X_B \sim N\left(0{,}2; \frac{0{,}5^2}{8} + \frac{0{,}6^2}{6}\right)$.
$P(X_A - X_B > 0) = 1 - \Phi(.) = 0{,}74604$.

b) Qual a probabilidade de 10 famílias da região A gastarem **no total** mais de 1860 euros?

Seja $Y = \sum_1^{10} X_{A_i} \sim N(16{,}5; 2{,}5).\ P(Y > 18{,}6) = 1 - \Phi\left(\frac{18{,}6-16{,}5}{\sqrt{2{,}5}}\right) = 0{,}09206.$