Universidade de Lisboa – Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

NOME--ENUNCIADO 1 ----

Número.. **Curso**..

MATEMÁTICA I

Época de Recurso - 27 de Janeiro de 2015 - Duração: 2 horas

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa +1.5; cada resposta errada -0.5; cada resposta não respondida ou anulada 0.

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero valores).

1. Considere a série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1-x}{3}\right)^n$ com $x \in \mathbb{R}$. Denotando por S a sua soma, pode afirmar-se que:

(A) Se $x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]4,+\infty\right[$ a série é convergente e $S = \frac{1-x}{2+x}$.

(B) Se $x \in \left]-2,4\right[$ a série é convergente e $S = \frac{1-x}{2+x}$.

(C) Se $x \in \left]-2,4\right[$ a série é convergente e $S = \frac{3}{2+x}$.

(D) Se $x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]4,+\infty\right[$ a série é convergente e $S = \frac{3}{2+x}$.

2. Considere a função $g(x) = \frac{e^x-e^{-x}+2x}{sinxcosx}$. Então:

(A) $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

(B) $\lim_{x\to 0} g(x) = 4$.

(C) $\lim_{x\to 0} g(x) = 2$.

(D) $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

3. O termo de grau 2 do polinómio de Taylor da função $f(x) = \sqrt{3x+1}$ em torno de zero é:

(A) $-\frac{x^2}{8}$.

(B) $-\frac{9x^2}{8}$.

(C) $\frac{x^2}{8}$.

(D) $\frac{9x^2}{8}$.

V.S.F.F.

4. Seja f uma função real de variável real tal que $f'(x) = \frac{1}{4+x^2}$ e $f(4) = \frac{\arctan(2)}{2}$. Então:

(A) $f(0) = -\frac{\pi}{8}$.

(B) $f(0) = \frac{\pi}{8}$.

(C) $f(2) = -\frac{\pi}{8}$.

(D) $f(2) = \frac{\pi}{8}$.

5. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares de Cramer. Então:

(A) Pode concluir-se que $B = O$.

(B) Pode tratar-se de um sistema de 4 equações com 3 incógnitas tal que $r(A) = 3$.

(C) Pode tratar-se de um sistema de 3 equações com 3 incógnitas tal que $r(A) = 3$.

(D) Pode tratar-se de um sistema de 3 equações com 3 incógnitas tal que $r(A) < 3$.

Universidade de Lisboa – Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

NOME.. **ENUNCIADO 2**

Número.. **Curso**..

MATEMÁTICA I

Época de Recurso - 27 de Janeiro de 2015 - Duração: 2 horas

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa +1.5; cada resposta errada -0.5; cada resposta não respondida ou anulada 0.

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero valores).

1. Seja f uma função real de variável real tal que $f'(x) = \frac{1}{4+x^2}$ e $f(4) = \frac{\arctan(2)}{2}$. Então:

(A) $f(0) = -\frac{\pi}{8}$.

(B) $f(0) = \frac{\pi}{8}$.

(C) $f(2) = -\frac{\pi}{8}$.

(D) $f(2) = \frac{\pi}{8}$.

2. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares de Cramer. Então:

(A) Pode concluir-se que $B = O$.

(B) Pode tratar-se de um sistema de 4 equações com 3 incógnitas tal que $r(A) = 3$.

(C) Pode tratar-se de um sistema de 3 equações com 3 incógnitas tal que $r(A) = 3$.

(D) Pode tratar-se de um sistema de 3 equações com 3 incógnitas tal que $r(A) < 3$.

3. Considere a série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1-x}{3}\right)^n$ com $x \in \mathbb{R}$. Denotando por S a sua soma, pode afirmar-se que:

(A) Se $x \in]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$ a série é convergente e $S = \frac{1-x}{2+x}$.

(B) Se $x \in]-2, 4[$ a série é convergente e $S = \frac{1-x}{2+x}$.

(C) Se $x \in]-2, 4[$ a série é convergente e $S = \frac{3}{2+x}$.

(D) Se $x \in]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$ a série é convergente e $S = \frac{3}{2+x}$.

V.S.F.F.

4. Considere a função $g(x) = \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{sinxcosx}$. Então:

(A) $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$.

(B) $\lim_{x \to 0} g(x) = 2$.

(C) $\lim_{x \to 0} g(x) = 4$.

(D) $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

5. O termo de grau 2 do polinómio de Taylor da função $f(x) = \sqrt{3x+1}$ em torno de zero é:

(A) $-\frac{x^2}{8}$.

(B) $-\frac{9x^2}{8}$.

(C) $\frac{x^2}{8}$.

(D) $\frac{9x^2}{8}$.

Universidade de Lisboa – Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

NOME...**ENUNCIADO 3**

Número.. **Curso**...

MATEMÁTICA I

Época de Recurso -27 de Janeiro de 2015 - Duração: 2 horas

Grupo I

Escolha múltipla. **Cotações**: cada resposta certa +1.5; cada resposta errada -0.5; cada resposta não respondida ou anulada 0.

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero valores).

1. Considere a série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1-x}{4}\right)^n$ com $x \in \mathbb{R}$. Denotando por S a sua soma, pode afirmar-se que:

(A) Se $x \in]-3,5[$ a série é convergente e $S = \frac{4}{3+x}$.

(B) Se $x \in]-\infty,-3[\cup]5,+\infty[$ a série é convergente e $S = \frac{4}{3+x}$.

(C) Se $x \in]-3,5[$ a série é convergente e $S = \frac{1-x}{3+x}$.

(D) Se $x \in]-\infty,-3[\cup]5,+\infty[$ a série é convergente e $S = \frac{1-x}{3+x}$.

2. Considere a função $g(x) = \frac{3x+e^x-e^{-x}}{sinxcosx}$. Então:

(A) $\lim_{x\to 0} g(x) = 3$.

(B) $\lim_{x\to 0} g(x) = 2$.

(C) $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

(D) $\lim_{x\to 0} g(x) = 5$.

3. O termo de grau 2 do polinómio de Taylor da função $f(x) = \sqrt{5x+1}$ em torno de zero é:

(A) $\frac{x^2}{8}$.

(B) $\frac{25x^2}{8}$.

(C) $-\frac{x^2}{8}$.

(D) $-\frac{25x^2}{8}$.

V.S.F.F.

4. Seja f uma função real de variável real tal que $f'(x) = \frac{1}{9+x^2}$ e $f(6) = \frac{\arctan(2)}{3}$. Então:

(A) $f(0) = -\frac{\pi}{12}$.

(B) $f(3) = \frac{\pi}{12}$.

(C) $f(3) = -\frac{\pi}{12}$.

(D) $f(0) = \frac{\pi}{12}$.

5. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares de Cramer. Então:

(A) Pode tratar-se de um sistema de 4 equações com 4 incógnitas tal que $r(A) < 4$.

(B) Pode tratar-se de um sistema de 4 equações com 4 incógnitas tal que $r(A) = 4$.

(C) Pode tratar-se de um sistema de 5 equações com 4 incógnitas tal que $r(A) = 4$.

(D) Pode concluir-se que $B = O$.

Universidade de Lisboa – Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

NOME..**ENUNCIADO 4**

Número.. **Curso**..

MATEMÁTICA I

Época de Recurso -27 de Janeiro de 2015 -- Duração: 2 horas

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa +1.5; cada resposta errada -0.5; cada resposta não respondida ou anulada 0.

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero valores).

1. O termo de grau 2 do polinómio de Taylor da função $f(x) = \sqrt{5x+1}$ em torno de zero é:

(A) $\frac{x^2}{8}$.

(B) $\frac{25x^2}{8}$.

(C) $-\frac{x^2}{8}$.

(D) $-\frac{25x^2}{8}$.

2. Considere a função $g(x) = \frac{3x+e^x-e^{-x}}{sinxcosx}$. Então:

(A) $\lim_{x\to 0} g(x) = 5$.

(B) $\lim_{x\to 0} g(x) = 2$.

(C) $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

(D) $\lim_{x\to 0} g(x) = 3$.

3. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares de Cramer. Então:

(A) Pode tratar-se de um sistema de 4 equações com 4 incógnitas tal que $r(A) < 4$.

(B) Pode tratar-se de um sistema de 4 equações com 4 incógnitas tal que $r(A) = 4$.

(C) Pode tratar-se de um sistema de 5 equações com 4 incógnitas tal que $r(A) = 4$.

(D) Pode concluir-se que $B = O$.

V.S.F.F.

4. Considere a série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1-x}{4}\right)^n$ com $x \in \mathbb{R}$. Denotando por S a sua soma, pode afirmar-se que:

(A) Se $x \in \,]-3,5[$ a série é convergente e $S = \frac{4}{3+x}$.

(B) Se $x \in \,]-\infty,-3[\,\cup\,]5,+\infty[$ a série é convergente e $S = \frac{4}{3+x}$.

(C) Se $x \in \,]-3,5[$ a série é convergente e $S = \frac{1-x}{3+x}$.

(D) Se $x \in \,]-\infty,-3[\,\cup\,]5,+\infty[$ a série é convergente e $S = \frac{1-x}{3+x}$.

5. Seja f uma função real de variável real tal que $f'(x) = \frac{1}{9+x^2}$ e $f(6) = \frac{\arctan(2)}{3}$. Então:

(A) $f(0) = -\frac{\pi}{12}$.

(B) $f(3) = \frac{\pi}{12}$.

(C) $f(3) = -\frac{\pi}{12}$.

(D) $f(0) = \frac{\pi}{12}$.

Respostas do Grupo 1 do exame de 27 de Janeiro de 2015

ENUNCIADO 1:

1) B
2) B
3) B
4) D
5) C

ENUNCIADO 2:

1) D
2) C
3) B
4) C
5) B

ENUNCIADO 3:

1) C
2) D
3) D
4) B
5) B

ENUNCIADO 4:

1) D
2) A
3) B
4) C
5) B

Universidade de Lisboa – Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA I

Época de Recurso - 27 de Janeiro de 2015 - Duração: 2 horas

Grupo II

(Cotações: 3.0 (2+1.0); 2.0; 3.0 (1.5+1.5); 2.5 (1.0+1.5); 2.0)

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + \alpha z = 3 \\ 2x + 5y + \alpha z = \beta \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Classifique o sistema em função dos valores dos parâmetros α e β, indicando nos casos adequados o grau de indeterminação (ou número de graus de liberdade).

(b) Considerando $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, resolva o sistema, indicando o conjunto solução.

2. Considere a função $f(x) = (x^2 - ax)e^x$, com $a \in \mathbb{R}$. Sabendo que $x = 1$ é ponto crítico de f, determine a e classifique esse ponto crítico.

3. Calcule:

(a) $\int_0^2 x(2-x)^6 dx$.

(b) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{3+x^2} dx$.

4. Considere a função $h(x) = \frac{\ln(2-e^{3x})}{x}$.

(a) Determine o domínio de h e a aderência desse conjunto.

(b) Mostre que h é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$ e defina esse prolongamento.

5. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Prove que a função $g(x) = f(x)e^{f^2(x)}$ não tem mais do que um zero real. Sugestão: aplique o teorema de Rolle.

MATEMÁTICA I

Época de Recurso - 27 de Janeiro de 2015

TÓPICOS DE RESOLUÇÃO DO GRUPO II

1.

(a) Tem-se a forma matricial $AX = B$ com:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha & 3 \\ 2 & 5 & \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[l_3-2l_1]{l_2-2l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha-2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-2 & \beta-2 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3+l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2(\alpha-2) & \beta-1 \end{array}\right]$$

Se $\alpha \neq 2$ e $\beta \in \mathbb{R}$, $r(A) = r(A|B) = 3 =$ número de incógnitas. Logo o sistema é possível determinado.

Se $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, $r(A) = r(A|B) = 2 < 3 =$ número de incógnitas. Logo o sistema é possível indeterminado com 1 grau de liberdade (número de incógnitas $-r(A)$).

Se $\alpha = 2$ e $\beta \neq 1$, $r(A) = 2 < 3 = r(A|B)$. Logo o sistema é impossível.

(b) De 1(a) tem-se:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 5y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - z \\ y = -1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Neste caso a incógnita livre é z e o conjunto solução é $\{(x, y, z): x = 3 - z, y = -1, z \in \mathbb{R}\}$.

5. Por hipótese, a função $f(x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. Por conseguinte, $e^{f^2(x)}$ também o é. Como a função $g(x)$ é o produto de duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, $g(x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. Como é diferenciável, a função $g(x)$ é também contínua em $\mathbb{R}$. Então $g(x)$ é diferenciável e contínua em qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$.

Por contradição, suponha-se que a função $g(x)$ tem pelo menos dois zeros reais. Sejam a e b, $a < b$, dois desses zeros, isto é, $g(a) = g(b) = 0$. Assim, $g(x)$ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e $g(a) = g(b)$. Então, pelo teorema de Rolle, existe um ponto $c \in\,]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$.

Derivando a função $g(x)$, obtém-se

$$g'(x) = f'(x)e^{f^2(x)}\left(1 + 2f^2(x)\right)\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $f'(x) \neq 0$, $e^{f^2(x)} \neq 0$ e $1 + 2f^2(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então $g'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Logo

$g'(c) \neq 0$, o que contradiz a hipótese de que que a função $g(x)$ tem pelo menos dois zeros reais. Conclui-se assim que a função $g(x)$ não tem mais do que um zero real.

2. Por definição de ponto crítico sabemos que 1 é ponto crítico de f se e só se $f'(1) = 0$; Como $f'(x) = (2x - a)e^x + (x^2 - ax)e^x = (x^2 + (2 - a)x - a)e^x$ obtemos

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow (1 + (2 - a) - a).e = 0 \Leftrightarrow 3 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2};$$

Para classificar o ponto crítico basta-nos procurar o 1º valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual $f^{(n)}(1) \neq 0$. Substituindo $a = \frac{3}{2}$ na expressão de $f'(x)$ vem $f'(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) e^x$. Logo

$$f''(x) = \left(2x + \frac{1}{2}\right) e^x + \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) e^x,$$

e substituindo x por 1 obtemos $f''(1) = \frac{5}{2}e$. Assim, concluimos que a ordem da 1ª derivada que não se anula para $x = 1$ é 2 (portanto par) e como $f''(1) > 0$ concluímos que $x = 1$ é um minimizante local.

Questão 3 a)

Primitivando por partes a função $x(2-x)^6$, temos:

$$\int x(2-x)^6 dx = -\frac{x(2-x)^7}{7} - \int -\frac{(2-x)^7}{7} dx = -\frac{x(2-x)^7}{7} - \frac{(2-x)^8}{56}$$

Pelo que:

$$\int_0^2 x(2-x)^6 dx = \left[-\frac{x(2-x)^7}{7} - \frac{(2-x)^8}{56}\right]_0^2 = \frac{2^8}{56} = \frac{32}{7}$$

Questão 3 b)

Tratando-se de um integral impróprio e tendo em conta que:

$$\int \frac{x}{3+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{3+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln(3+x^2)$$

Temos:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{3+x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{x}{3+x^2} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(3+x^2)\right]_2^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} (\ln(3+x^2) - \ln 7) =$$

$$= +\infty$$

Questão 4 a)

Dada a função $h(x) = \frac{\ln(2-e^{3x})}{x}$, temos:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \ \wedge \ 2 - e^{3x} > 0\}$$

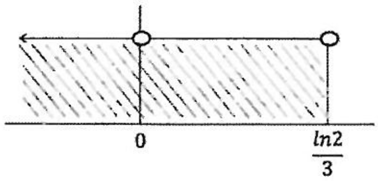
Tendo em conta que:

$$2 - x^{3x} > 0 \Leftrightarrow e^{3x} < 2 \Leftrightarrow 3x < \ln 2 \Leftrightarrow x < \frac{\ln 2}{3}$$

Vem:

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq 0 \wedge x < \frac{\ln 2}{3}\right\} = \left]-\infty, \frac{\ln 2}{3}\right[\setminus \{0\}$$

Geometricamente, o conjunto pode ser representado por:



Pelo que, denotando por $\overline{D_h}$ a aderência do conjunto e tendo em conta que em conta que esta resulta da união do seu interior com a sua fronteira, temos :

$$\overline{D_h} = \left]-\infty, \frac{ln2}{3}\right[$$

Questão 4 b)

A função $h(x)$ é prolongável por continuidade em $x = 0$ se existe e for finito $\lim_{x \to 0} h(x)$.

Uma vez que ao calcular o $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(2-e^{3x})}{x}$ obtemos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e estando nas condições da Regra de Cauchy, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(2 - e^{3x})}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-3e^{3x}}{2 - e^{3x}} = \frac{-3}{2 - 1} = -3$$

Logo, sendo o que o limite existe (é finito), a função $h(x)$ é prolongável por continuidade em $x = 0$, sendo esse prolongamento denotado por uma nova função $g(x)$, com domínio $\left]-\infty, \frac{\ln 2}{3}\right[$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(2 - e^{3x})}{x} & , x \neq 0 \\ \\ -3 & , x = 0 \end{cases}$$