

# Cálculo e Instrumentos Financeiros



# Objectivo

- Finanças
- Decisões Financeiras (Investimento, Financiamento, Dividendos)
- Valor temporal do dinheiro;
- Tempo, capital e Juro;
- Rendimentos;
- Investimentos;



SINCE 1911

- 1 - Capitalização, regimes e taxas
- 2 - Equivalência de Capitais
- 3 - Rendas Certas
- 4 - Reembolso de Empréstimos
- 5 - Produtos e Instrumentos Financeiros
- 6 - Empréstimos por Obrigações

- Funcionamento das aulas:
  - Aulas teóricas
  - Aulas práticas
- Avaliação:
  - Duas épocas de avaliação de conhecimentos (Época normal e de recurso), existindo para cada época uma prova escrita individual.
  - Cada prova é realizada sem consulta. A prova contém um formulário previamente disponibilizado na página da disciplina.
  - Quando a classificação da prova for superior a 17 valores, poderá ser realizada uma prova extra para defesa da nota, garantindo-se a classificação mínima de 17 valores.

- Bibliografia

- Barroso, M. N., Couto, E. and Crespo, N. (2009), Cálculo e Instrumentos Financeiros, Escolar Editora, 2ª Edição, Lisboa.
- Broverman, S. A. (2008), Mathematics of Investment and Credit, ACTEX Academic Series, ACTEX Publications Inc., Winsted, Connecticut, USA.

- Contactos

Inês Pinto

Gab. 315 ext. 465960

[inespinto@iseg.ulisboa.pt](mailto:inespinto@iseg.ulisboa.pt)



SINCE 1911

- Equipa Docente:

Inês Ferreira da Fonseca Pinto (Teóricas, M12)

Agnieszka I. Bergel (Quantative Finance)

Carlos A. Pestana Barros (M02, M05)

Joaquim L. Montezuma de Carvalho (Quantative Finance)

José Manuel Dias Lopes (M03, M14)

Maria Amélia F. Branco A. Dias (M51, M52, M53)

Nuno Joel Gaspar F. Crespo (M11, M13, M15, R11)

Pedro José Marto Neves (M01, R12)

Tiago Rodrigo Andrade Diogo (M04, M16, M31)



SINCE 1911

## Valor Temporal do Dinheiro

1€ euro vale ? do que 1€ amanhã





SINCE 1911

I - Regime de  
Capitalização

1- Introdução

2- Regime Juro  
Simples

3- Regime Juro  
Composto

4- Relações  
entre taxas  
Juro

5- Taxa  
Instantânea de  
Capitalização

## • Tempo, Capital e Juro

- **Capital** ou investimento financeiro é a quantidade de moeda (meios líquidos) cedida pelo seu proprietário a terceiros por um determinado período de tempo acordado entre ambas as partes.
- **Tempo** é o prazo durante o qual o capital é aplicado (cedido).
- **Juro** é o rendimento proveniente de um capital cedido (aplicado) por um período de tempo.



“o dinheiro gera dinheiro”



- Juro e Taxa de Juro
  - Juro: preço do dinheiro cedido

$$Juro = F(t, C)$$

Em que J é o Juro, t é o tempo e C é o capital. A função que traduz a relação existente entre estes três elementos é dada por:

$$J_n = C_{inic} * R$$

Em que j – Juro, n o período de tempo, C<sub>inic.</sub> é o capital inicial e R uma constante de proporcionalidade.

$R$  → Taxa de Juro (mensal, semestral, ou anual)

A taxa de juro depende de um acordo entre duas partes, sendo função:

- Risco de não Reembolso
- Lei da oferta e procura nos mercados financeiros
- Tipo de operação em questão (dimensão e tempo)
- Legislação (Código civil, Ministério das Finanças; Banco de Portugal e CMVM)



- I - Regime de Capitalização
- 1 - Introdução
- 2 - Regime Juro Simples
- 3 - Regime Juro Composto
- 4 - Relações entre taxas Juro
- 5 - Taxa Instantânea de Capitalização

• **CAPITALIZAÇÃO:**

**Exemplo:** Considere um depósito de 5.000 euros no banco ibérico por um período de 1 ano. O banco remunera este depósito a uma taxa de juro anual de 4%.



Capital acumulado ou capitalizado no final do período:

$$C_n = C_0 + J = C_0 + C_0 * n * i$$

J – Juro produzido no final do período, n prazo da operação, i a taxa de juro

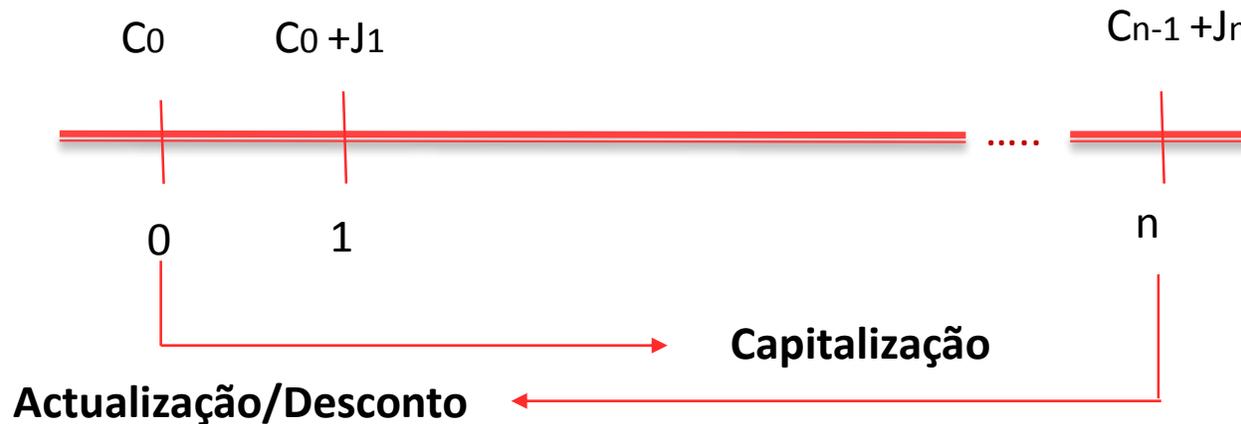
- I - Regime de Capitalização
- 1 - Introdução
- 2 - Regime Juro Simples
- 3 - Regime Juro Composto
- 4 - Relações entre taxas Juro
- 5 - Taxa Instantânea de Capitalização

• ACTUALIZAÇÃO:

Valor actual ou actualizado de um capital (operação inversa)

$$C_0 = C_n - J$$

Em que D = Desconto =  $C_n - C_0$



I - Regime de Capitalização

1- Introdução

2- Regime Juro Simples

3- Regime Juro Composto

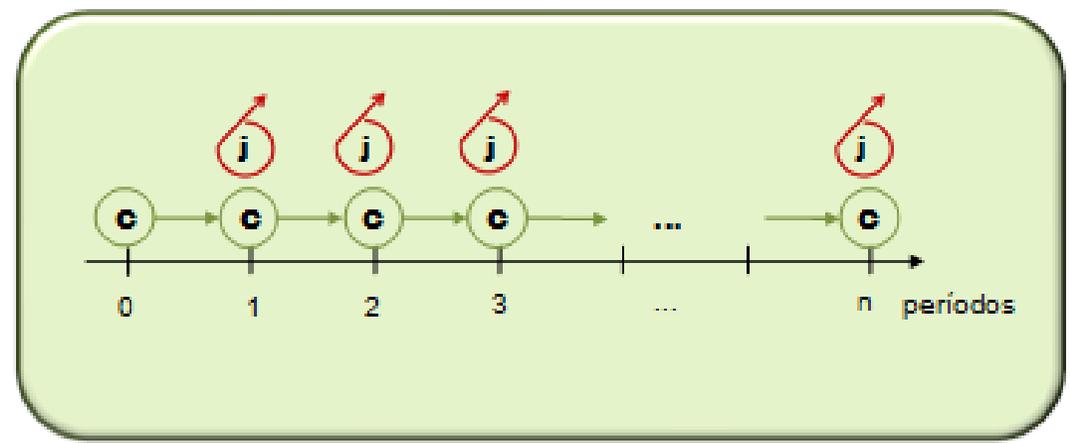
4- Relações entre taxas Juro

5- Taxa Instantânea de Capitalização

- Capitalização em regime de juro simples:

Em **regime de juros simples**, os juros produzidos em cada período são excluídos do processo de capitalização.

O capital que vence juros é constante ao longo do processo.





- I - Regime de Capitalização
- 1- Introdução
- 2- Regime Juro Simples
- 3- Regime Juro Composto
- 4- Relações entre taxas Juro
- 5- Taxa Instantânea de Capitalização

**Exemplo:** O Senhor João Marques dirigiu-se ao Banco ibérico onde depositou 1.000 euros num depósito a prazo a uma taxa de juro já líquida de impostos de 2,5% ao ano. O Sr. João Marques só precisa do capital daqui a 5 anos, mas pretende todos os anos retirar da conta os juros produzidos.

O cálculo dos juros em cada período é dado por:

$$J_i = C_0 * i$$

Os juros produzidos ao longo do tempo serão dados por:

$$J_{total} = \sum_{i=1}^n J_i = n * C_0 * i$$

O valor acumulado ao fim de n períodos é dado por:

$$C_n = C_0(1 + n * i)$$

- Conceito de actualização ou desconto:

**Exemplo:** O Senhor Henrique pretende ter na sua conta bancária, no final do ano a quantia de 20.000 euros. Considerando uma taxa de juro de 5% ao ano, qual a quantia que deverá aplicar hoje, para conseguir realizar aquele objectivo? Suponha agora que o Sr. Henrique apenas necessita de ter os 20.000 euros disponíveis daqui a 3 anos. Qual a quantia a aplicar hoje?

- O valor actual ou descontado em regime de juro simples é dado por:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + n * i)}$$

- O valor do Desconto é dado por:

$$D_d = C_n - C_0 = C_0 * n * i$$

I - Regime de Capitalização

1- Introdução

2- Regime Juro Simples

3- Regime Juro Composto

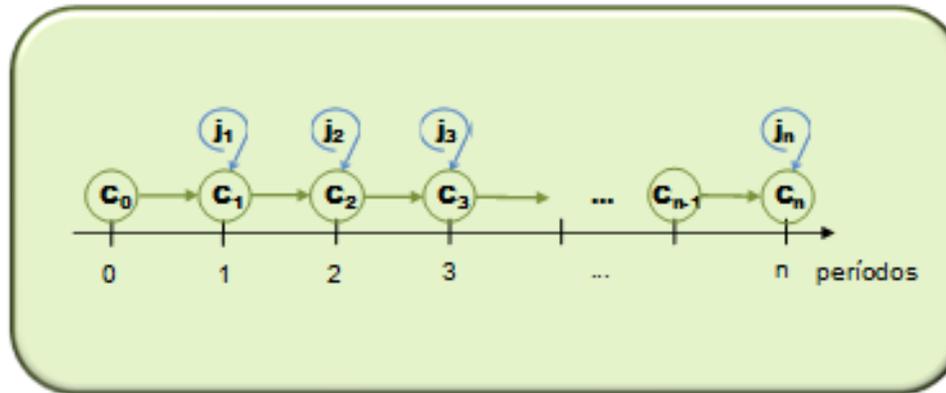
4- Relações entre taxas Juro

5- Taxa Instantânea de Capitalização

- Capitalização em regime de juro composto:

Em regime de **juro composto**, os juros produzidos são adicionados ao capital vencendo também juros no período seguinte.

Os juros vão gerar juros.





SINCE 1911

# LISBOA SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT

**Exemplo:** A D<sup>a</sup> Deolinda entregou, no Banco Universal, 15.000 euros, que pretende levantar dentro de 3 anos, para a compra de um novo automóvel. O Banco remunera os depósitos à taxa de 2.5% ao ano. A D<sup>a</sup> Deolinda apenas pretende reaver o capital entregue e os juros entretanto acumulados aquando da compra do automóvel. Qual o valor disponível na conta da D<sup>a</sup> Deolinda no 3<sup>o</sup> ano de vida do depósito.



I - Regime de Capitalização

1- Introdução

2- Regime Juro Simples

3- Regime Juro Composto

4- Relações entre taxas Juro

5- Taxa Instantânea de Capitalização

O cálculo dos juros para cada período  $n$  é dado por:

$$J_n = C_0 * (1 + i)^{n-1} * i$$

O valor acumulado ao fim de  $n$  períodos é dado por:

$$C_n = C_0 * (1 + i)^n$$

Os juros produzidos ao longo do tempo serão dados por:

$$J_{total} = C_0 * [(1 + i)^n - 1]$$



1-Regime de Capitalização

1-Introdução

2- Regime Juro Simples

3- Regime Juro Composto

4-Relações entre taxas Juro

5-Taxa Instantânea de Capitalização

- Em regime de juros composto, o valor actual de um capital é dado por:

$$C_0 = C_n * (1 + i)^{-n} = \frac{C_n}{(1 + i)^n}$$

**Exemplo:** Suponha agora como no exemplo anterior que o Sr. Henrique só necessita de ter os 20.000 euros no final de 3 anos. Qual a quantia que ele deverá entregar hoje considerando o regime de juro composto (valor actual)?

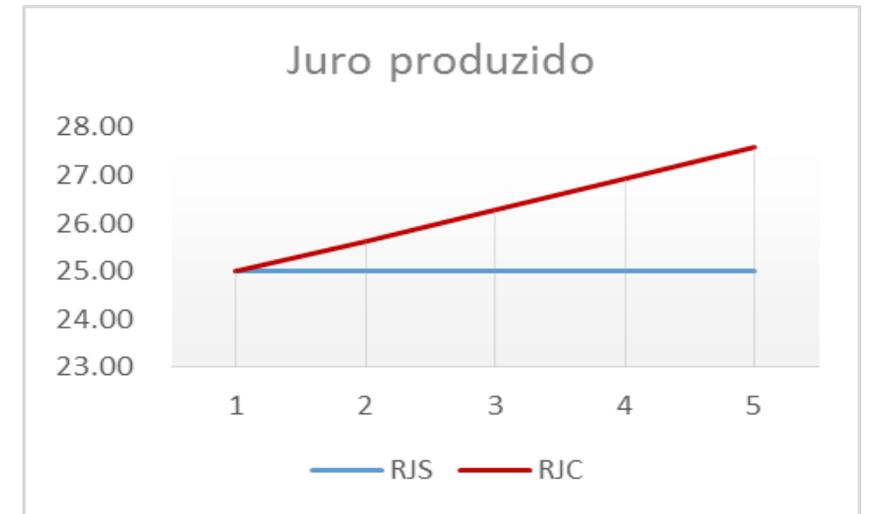


• **Regime de Juro Simples vs. Composto**

No exemplo:

- ✓ Capital: 1.000 euros
- ✓ Período: 5 anos
- ✓ Taxa de juro: 2.5% ao ano

(euros)	Regime Juro Simples		Regime de Juro Composto	
	Juro Vencido	Capital	Juro Vencido	Capital
Período				
1	25.00	1,000.00	25.00	1,025.00
2	25.00	1,000.00	25.63	1,050.63
3	25.00	1,000.00	26.27	1,076.89
4	25.00	1,000.00	26.92	1,103.81
5	25.00	1,000.00	27.60	1,131.41





## 1. Taxas Proporcionais:

Duas taxas dizem-se proporcionais quando, sendo de períodos diferentes, existe entre elas a mesma relação de valor que existe entre os seus períodos.

**Exemplo:** Considere uma taxa anual de 8%. Indique qual a taxa trimestral proporcional a esta.

Generalizando a relação de proporcionalidade entre taxas é dada por:

$$i = i_k * m$$

$$i_k = \frac{i}{m}$$



- Relações entre Taxas de Juro

## 2. Taxas Equivalentes:

Dizem-se equivalentes quando, sendo relativas a períodos de tempo diferentes, aplicadas durante o mesmo prazo e ao mesmo capital, produzem um valor acumulado (ou actualizado) igual em regime de juro composto.

**Exemplo:** Suponha que um capital de 1.000 euros é aplicado durante um ano à taxa de Juro semestral de 5% ( $i_s=5\%$ ) em regime de juro composto. Qual é a taxa equivalente anual?



Generalizando, a relação de equivalência entre duas taxas é dada por:

$$(1 + i_k)^m = 1 + i$$

Em que:

$i_k$  – taxa de período menor (no nosso exemplo is – taxa semestral);

$i$  – taxa de período maior (no nosso exemplo seria o ano ia – taxa anual);

$m$  – relação existente entre os dois períodos (no nosso exemplo  $m=2$ ). Em que  $m$  traduz a relação entre as taxas, sendo determinado através da divisão do prazo do período maior pelo prazo do período menor.



SINCE 1911

I - Regime de  
Capitalização

1- Introdução

2- Regime Juro  
Simples

3- Regime Juro  
Composto

4- Relações  
entre taxas  
Juro

5- Taxa  
Instantânea de  
Capitalização

## • Exemplos:

- Considere uma taxa semestral de 6%. Indique a taxa anual equivalente. Indique a taxa trimestral equivalente.
- Considere uma taxa trimestral de 2,4%. Calcule a taxa equivalente para um período de 8 meses. Calcule a taxa equivalente mensal.



I - Regime de  
Capitalização

1- Introdução

2- Regime Juro  
Simples

3- Regime Juro  
Composto

4- Relações  
entre taxas  
Juro

5- Taxa  
Instantânea de  
Capitalização

### 3. Taxas Efectivas

Se as taxas  $i_k$  e  $i$  são equivalentes, isto é produzem o mesmo efeito quando aplicadas ao mesmo capital durante o mesmo período de tempo então é indiferente aplicar uma ou outra . Estas taxas são definidas como efectivas desde que pelo menos uma seja referida ao período de capitalização efectivamente praticado.

**Exemplo:** Suponha que um capital de 1.000 euros é aplicado durante um ano à taxa de Juro semestral de 5% ( $i_s=5\%$ ) em regime de juro composto. Qual é a taxa equivalente anual?



- I - Regime de Capitalização
- 1- Introdução
- 2- Regime Juro Simples
- 3- Regime Juro Composto
- 4- Relações entre taxas Juro
- 5- Taxa Instantânea de Capitalização

## 4. Taxas Nominais

No entanto, se em vez de falarmos em taxas equivalentes usarmos taxas proporcionais,  $i_k$  e  $i$ , somente uma delas pode ser considerada efectiva. Se a capitalização se fizer no período  $1/k$ , a taxa  $i_k$  será efectiva no período de referência  $1/k$  e a taxa proporcional  $i$  será a taxa anual correspondente (não equivalente). Esta taxa proporcional chama-se **taxa nominal ou declarada**.

Generalizando e representando a taxa nominal por  $i^{(m)}$  referente a um determinado período fixo maior sendo convertível  $m$  vezes (faremos  $m$  aplicações em períodos  $1/m$  será:

$$i_k = \frac{i^{(m)}}{m}$$



- A taxa efectiva do período fixo maior será calculada através da fórmula de equivalência:

$$(1 + i_k)^m = 1 + i$$

- Se substituirmos  $i_k$  nesta expressão pela fórmula anterior, obtemos:

$$\left(1 + \frac{i_k^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i_k$$

Chama-se a atenção que para as taxas nominais, há sempre dois períodos que é necessário indicar: o período da taxa e o período da capitalização.



I - Regime de  
Capitalização

1- Introdução

2- Regime  
Juro Simples

3- Regime  
Juro  
Composto

4- Relações  
entre taxas  
Juro

5- Taxa  
Instantânea  
de  
Capitalização

- Exemplo

Partindo de uma taxa anual efectiva de 4.0604% ( $i_A$ ), pretende-se calcular:

a) Taxa trimestral efectiva,  $i_T$ ;

b) Taxa anual nominal convertível trimestralmente,  $i_A^{(4)}$ ;

c) Taxa anual nominal convertível diariamente,  $i_A^{(365)}$



I - Regime de  
Capitalização

1- Introdução

2- Regime  
Juro Simples

3- Regime  
Juro  
Composto

4- Relações  
entre taxas  
Juro

5- Taxa  
Instantânea  
de  
Capitalização

- Taxa Instantânea de Capitalização

Podemos querer determinar qual a taxa nominal no caso do número de capitalizações ser infinito, ou seja, qual a taxa nominal quando as capitalizações se fazem de forma contínua:

$$1+i_A = \left(1 + \frac{i_A^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$i_A^{(m)} = m \cdot \left[ (1+i_A)^{\frac{1}{m}} - 1 \right]$$

$$i_A^{(m)} = \frac{(1+i_A)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}}$$



I - Regime de  
Capitalização

1- Introdução

2- Regime  
Juro Simples

3- Regime  
Juro  
Composto

4- Relações  
entre taxas  
Juro

5- Taxa  
Instantânea  
de  
Capitalização

- Calculando o limite para que tende  $i_A^{(m)}$  quando  $m$  tende para infinito, surge uma indeterminação:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i_A^{(m)} = \frac{(1+i_A)^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{(1+i_A)^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Aplicando a regra de *L'Hôpital*, o limite mantém-se.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i_A^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1+i_A)^{\frac{1}{m}} \cdot \ln(1+i_A) \cdot \left(-\frac{1}{m^2}\right)}{\left(-\frac{1}{m^2}\right)}$$



I - Regime de  
Capitalização

1- Introdução

2- Regime  
Juro Simples

3- Regime  
Juro  
Composto

4- Relações  
entre taxas  
Juro

5- Taxa  
Instantânea  
de  
Capitalização

Simplificando:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i_A^{(m)} = (1 + i_A)^{\frac{1}{\infty}} \cdot \ln(1 + i_A) = \ln(1 + i_A)$$

Representado por  $\delta$  a taxa instantânea anual de capitalização, fica:

$$\delta = \ln(1 + i_A)$$

Generalizando para qualquer taxa instantânea relativa a um qualquer período  $k$ :

$$\delta = \ln(1 + i)$$

Deduz também que:

$$1 + i = e^{\delta}$$



I -Regime de  
Capitalização

1-Introdução

2- Regime  
Juro Simples

3- Regime  
Juro  
Composto

4-Relações  
entre taxas  
Juro

5-Taxa  
Instantânea  
de  
Capitalização

Deste modo é possível obter a fórmula geral de capitalização utilizando a taxa instantânea de capitalização. Como:

$$C_n = C_0 * (1 + i)^n$$

Introduzindo a taxa instantânea, fica:

$$C_n = C_0 * e^{\delta.n}$$