



SINCE 1911

**LISBOA  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT**

# Cálculo e Instrumentos Financeiros

RENDAS

III -Rendas

1-Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

3- Rendas de termos constantes

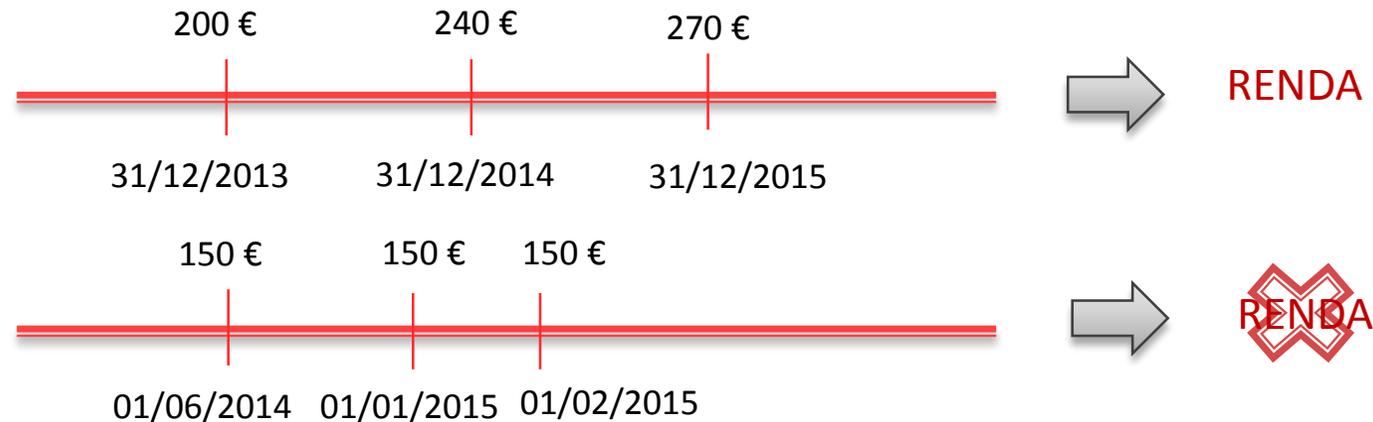
5- Rendas Perpétuas

4-Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

• **Conceitos**

- **Renda:** sucessão de capitais que se vencem periodicamente ao longo do tempo em momentos equidistantes;
- **Período da renda:** intervalo de tempo entre cada vencimento, isto é, o vencimento que vai de um vencimento de capital até ao vencimento imediatamente a seguir.
- **Termo da renda:** valor dos capitais que se vencem periodicamente



III - Rendas

1- Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

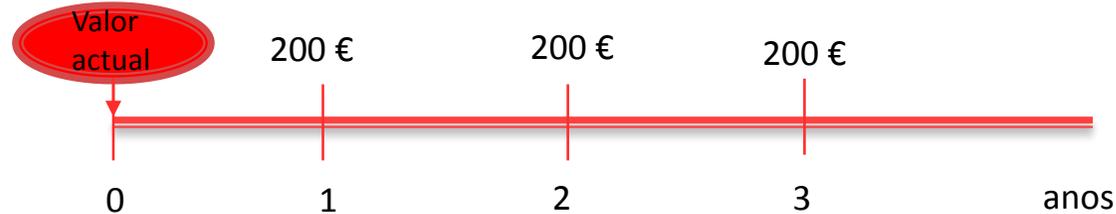
3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

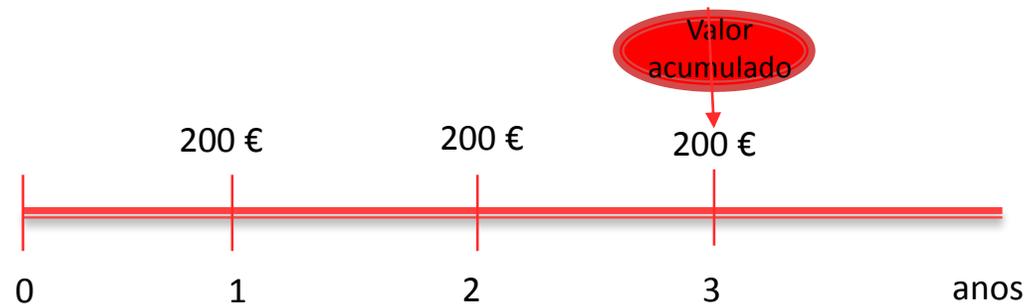
4- Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

- **Valor Actual da Renda:** Valor referido ao início do primeiro período, "momento 0". É constituído pela soma dos valores actuais de cada um dos seus termos, referidos ao momento 0.



- **Valor Acumulado da Renda:** Valor referido ao fim do último período. É a soma dos valores acumulados/capitalizados de cada um dos seus termos.



III - Rendas

1- Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

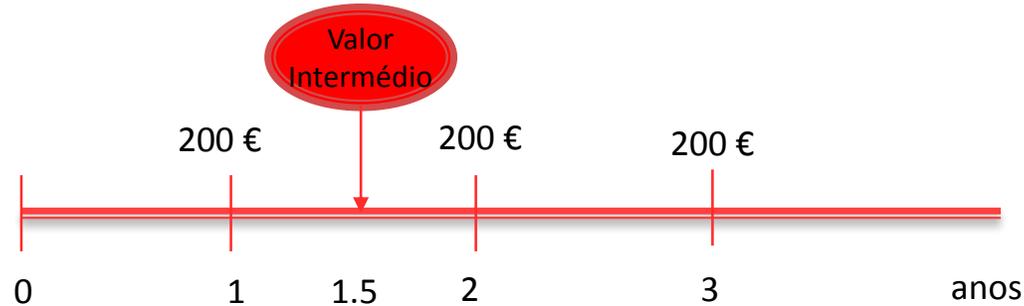
3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

4- Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

- **Valor Intermédio da Renda:** Soma dos valores acumulados dos termos vencidos com a dos valores actuais dos termos vincendos, todos referidos ao ponto intermédio.





III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4-Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

- Classificação das Rendas:

Critério	Tipo de Renda	Características Principais
Variabilidade dos termos	Constante	Termos iguais
	Variável	Termos diferentes
Número de Termos	Temporária	Número finito de termos
	Perpétua	Número infinito de termos
Períodos da renda e taxa de Juro	Inteira	Períodos coincidentes
	Fraccionada	Períodos não coincidentes
Vencimento do primeiro Termo	Normal, imediata, postecipada	1º termo vence-se um período após a negociação
	Antecipada	1º termo vence-se no momento da negociação
	Diferida m-1 períodos	1º termo vence-se m períodos após negociação
Acontecimentos	Certa	Pagamento dos termos independentes de factos aleatórios
	Incerta	Pagamento dos termos ligados a factos aleatórios

III -Rendas

1-Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

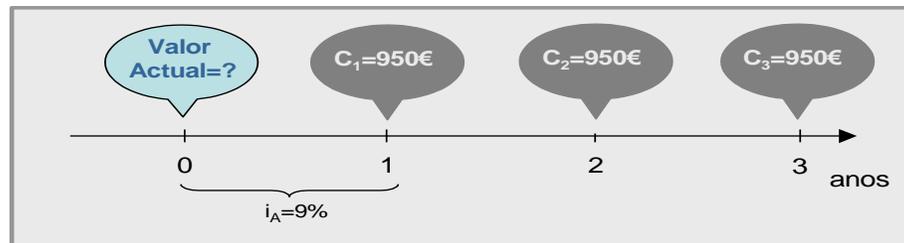
4-Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

• Valor actual e acumulado:

- **Renda temporária inteira constante e imediata ou normal/postecipada:** renda de termos constantes com um número finito de termos em que o seu período coincide com o período da taxa de juro e o primeiro termo vence-se um período após a negociação:

**Exemplo:** O João comprou um iPad, pagável em três prestações anuais de 950,00 euros cada (inclui juros). Taxa de 9% ao ano. Se o João quisesse pagar o computador, na sua totalidade, no momento da compra, quanto deveria ter desembolsado?



III -Rendas

1-Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

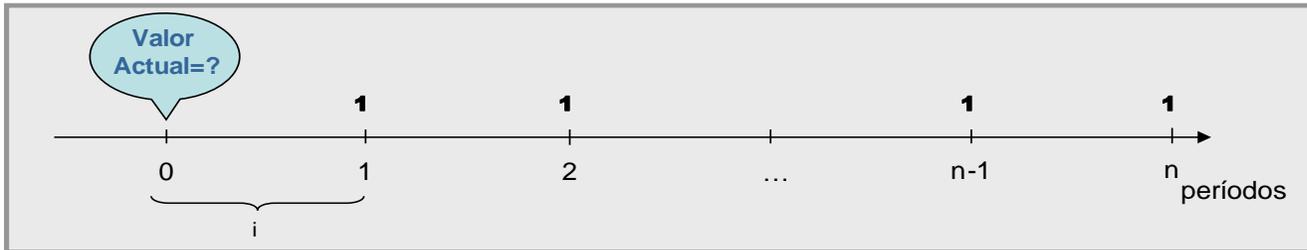
3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

4-Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

- Generalizando:



O valor actual é dado por:

$$\text{Valor Actual} = 1 \times (1+i)^{-1} + 1 \times (1+i)^{-2} + \dots + 1 \times (1+i)^{-n}$$

Se a notação para o valor actual de uma renda com estas características for:

$$a_{\overline{n}|i} = 1 \times (1+i)^{-1} + 1 \times (1+i)^{-2} + \dots + 1 \times (1+i)^{-n}$$



III -Rendas

1- Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4- Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

Fazendo  $(1+i)^{-1} = v$ ,

$$a_{\overline{n}|i} = v + v^2 + \dots + v^n$$

Estamos perante uma progressão geométrica de razão  $v$ , cuja soma dos termos é igual a:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{v - v^n \cdot v}{1 - v}$$

Multipliquemos o numerador e o denominador da fracção por  $(1+i)$ :



III -Rendas

1-Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

4-Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

Temos:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}(1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}} \times \frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{(1+i)^{-1}(1+i) - (1+i)^{-n-1+1}}{(1+i) - (1+i)^{-1+1}} =$$

$$= \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1+i-1} = \frac{1-v^n}{i}$$

Ou seja:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Ou o valor actual de uma renda de termo T será dada por::

$$T.a_{\overline{n}|i} = T \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

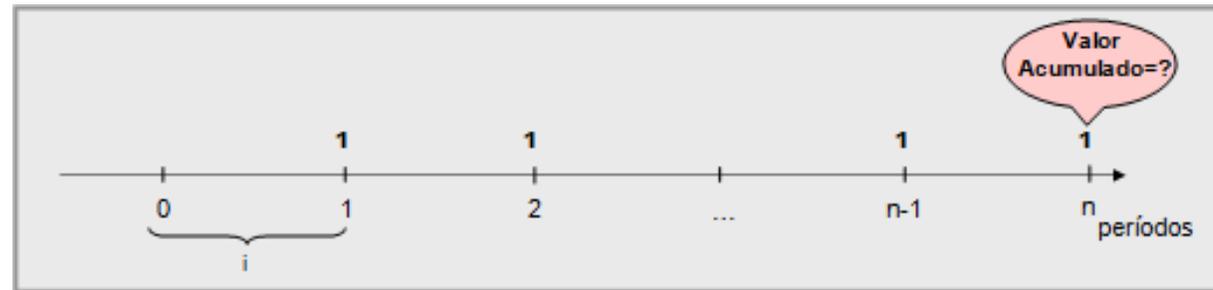
3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4-Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

• Valor acumulado



O valor da renda referido ao último momento (momento n), ou seja, o valor acumulado, pode ser representado por:

$$S_{n|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^2 + (1+i) + 1$$

Trata-se de uma progressão geométrica de razão  $(1+i)^{-1}$



III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4-Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

Logo:

$$s_{\overline{n}|i} = [(1+i)^n - (1+i)^{-1}] / [1 - (1+i)^{-1}]$$

Multiplicando ambos os termos por  $(1+i)$ , obtemos após simplificação:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Ou no caso de uma renda de termo  $T$ , o valor acumulado é dado por:

$$T \cdot s_{\overline{n}|i} = T \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$



III -Rendas

1- Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4- Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

- Expressões gerais: Renda de termos constantes T e normais

Valor actual:

$$T.a_{\overline{n}|i} = T \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Valor acumulado:

$$T.s_{\overline{n}|i} = T \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Ver exemplo

III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

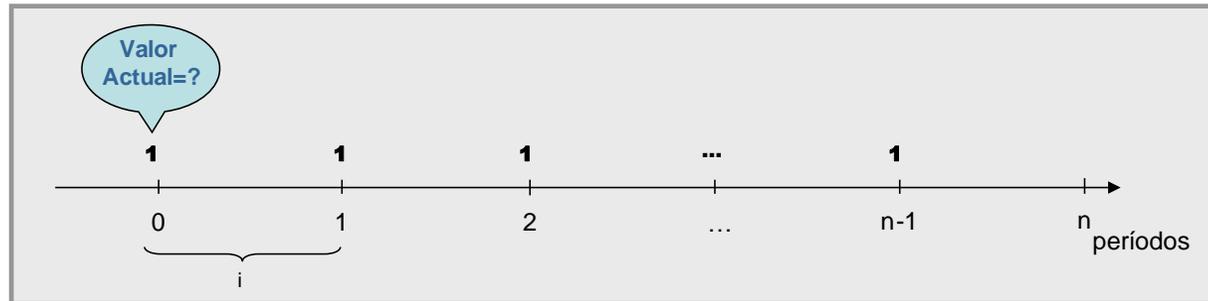
3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4-Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

- **Renda temporária inteira constante e antecipada:** renda de termos constantes com um número finito de termos em que o seu período coincide com o período da taxa de juro e o primeiro termo vence-se no momento da negociação, isto é, os seus termos vencem-se no início do período a que dizem respeito.



O valor actual da renda antecipada é dada por:

$$\ddot{a}_{n|i} = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} = 1 + a_{n-1|i}$$



III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4-Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

Relacionando com a renda normal, temos:

$$\ddot{a}_{n|i} = a_{n|i} * (1 + i)$$

Da mesma forma, temos que o valor acumulado é dado por:

$$\ddot{S}_{n|i} = S_{n|i} * (1 + i)$$



### III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4-Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

- **Renda temporária inteira constante diferida**: renda de termos constantes com um número finito de termos em que o seu período coincide com o período da taxa de juro e o primeiro termo vence-se mais do que um período após o momento da negociação.

**Exemplo:** O Tomás também adquiriu um computador portátil, que pagará em quatro prestações semestrais, de 650,00 € cada, incluindo juros, no final de cada semestre, sendo o primeiro pagamento efectuado daqui a três semestres. A empresa vendedora financia a compra à taxa de 4% ao semestre ( $i_s=4\%$ ). Se o Tomás pretendesse pagar o computador, na sua totalidade, no momento da compra, quanto deveria desembolsar?

III -Rendas

1-Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

4-Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

- Ou seja:



Para uma renda diferida k períodos o valor actual é dado por:

$${}_k/a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1 + i)^{-k}$$

E o valor acumulado:

$${}_k/s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}$$

III -Rendas

1-Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

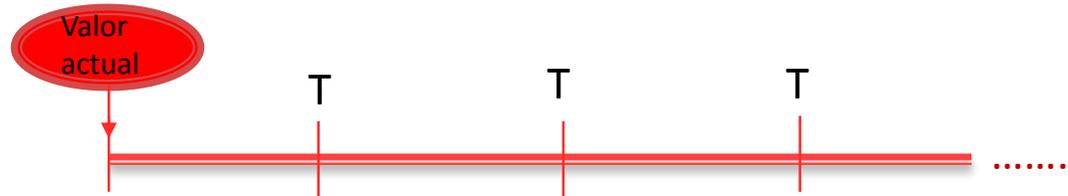
3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

4-Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

- **Renda perpétua**: uma renda perpétua é uma sucessão de capitais em número infinito. Uma renda perpétua pode ser imediata, antecipada ou diferida, constante ou variável e ainda inteira ou fraccionada.



Renda perpétua constante inteira imediata:

$$a_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-v^n}{i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$a_{\infty|i} = \frac{1}{i}$$



$$\text{Valor actual} = T * a_{\infty|i} = \frac{T}{i}$$



### III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4-Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

**Exemplo:** Determine o valor actual de uma renda perpétua inteira constante sendo os termos iguais a 10 euros ano. Considere uma taxa de juro anual de 5%.



### III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

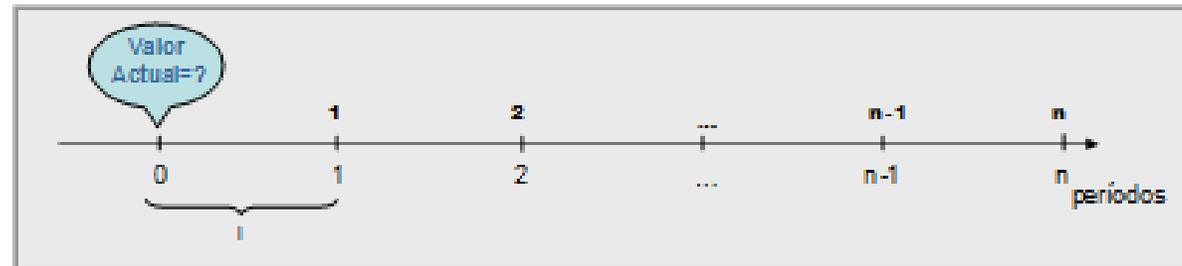
4-Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

- **Rendas Variáveis:** Diz-se que uma renda é variável se os seus termos são variáveis ao longo do tempo. Essa variabilidade pode seguir qualquer lei matemática ou pode ser aleatória. Neste último caso, o valor actual terá de ser feito através da actualização dos termos um a um.
  - Renda variável em progressão aritmética crescente

**Exemplo:** O João comprou um computador pagável em 3 prestações postecipadas anuais, de 950, 1000 e 1050 euros (incluindo juros). O crédito é financiado à taxa de 9% ao ano. A quanto pagaria?

Genericamente, consideremos uma renda cujos termos constituam uma progressão aritmética de razão 1 e cujo primeiro termos seja também igual a 1 designando o valor actual dessa renda por  $(Ia_{n-1})$ :





III -Rendas

1- Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

4- Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

- Esta renda pode decompor-se em várias rendas de termos unitários:

$$(Ia)_{\overline{n}|i} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^n +$$

$$v^2 + v^3 + \dots + v^n +$$

$$v^3 + \dots + v^n +$$

....

$$+ v^n =$$

$$= a_{\overline{n}|i} +_1 a_{\overline{n-1}|i} +_2 a_{\overline{n-2}|i} + \dots +_{n-1} a_{\overline{1}|i}$$



III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4-Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

- Substituindo as expressões pelas respectivas fórmulas e simplificando, obter-se-á:

$$(Ia)_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - n \cdot v^n}{i}$$

- Ou, se em alternativa à renda unitária existir uma renda de 1º termo e razão igual a h:

$$h \cdot (Ia)_{\overline{n}|i} = h \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - n \cdot (1+i)^{-n}}{i}$$

## III - Rendas

1- Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

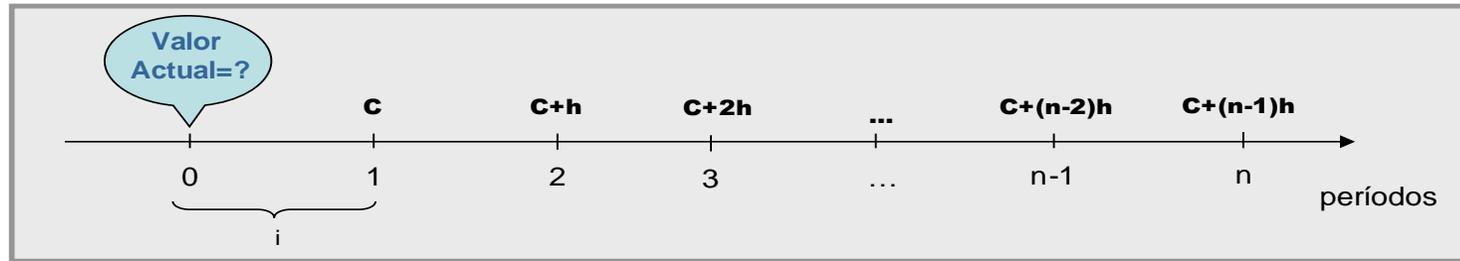
3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

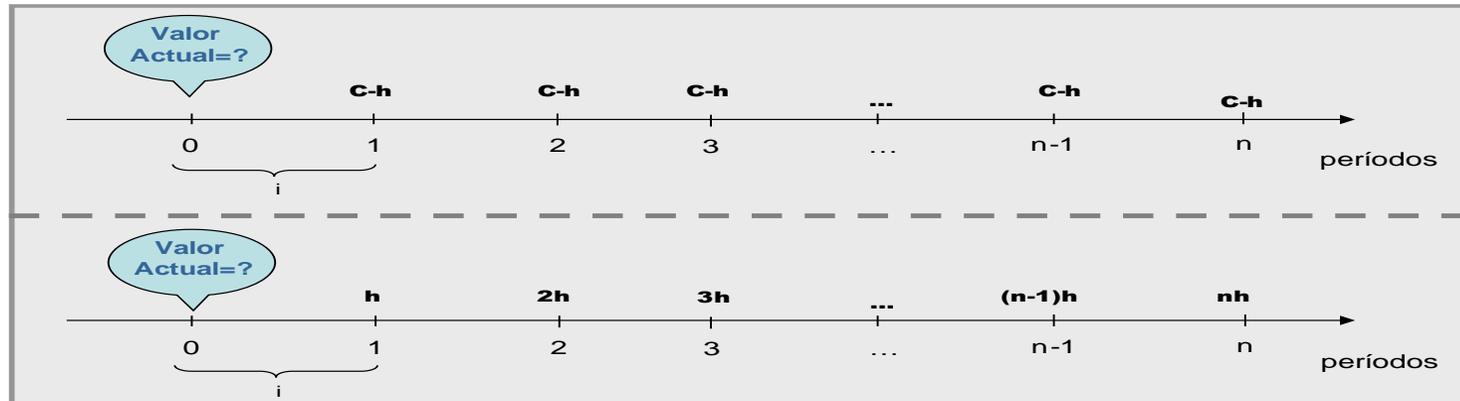
4- Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

- No caso de se tratar de uma renda em progressão aritmética de  $n$  termos, sendo o primeiro igual a  $C$  e a razão igual a  $h$ , podemos também decompor a mesma em rendas já conhecidas:



- Para facilitar





III -Rendas

1- Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4- Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

- Logo, neste caso estaremos perante uma renda constante de valor (C-h) e uma renda em progressão aritmética crescente, com valor da razão igual ao primeiro termo (h):

$$\text{Valor Actual} = (C - h) \cdot a_{\overline{n}|i} + h \cdot (Ia)_{\overline{n}|i}$$

Em que:

$$h \cdot (Ia)_{\overline{n}|i} = h \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - n \cdot (1+i)^{-n}}{i}$$

III -Rendas

1- Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

3- Rendas de termos constantes

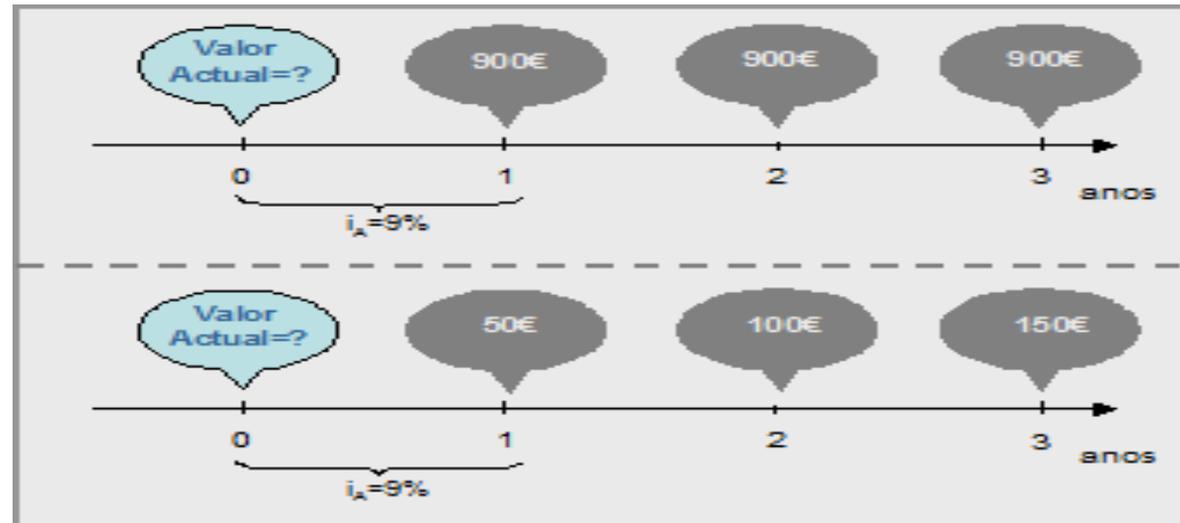
5- Rendas Perpétuas

4- Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

- Considerando o exemplo anterior:

**Exemplo:** O João comprou um computador pagável em 3 prestações postecipadas anuais, de 950, 1000 e 1050 euros (incluindo juros). O crédito é financiado à taxa de 9% ao ano. A pronto quanto pagaria?





III -Rendas

1-Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

4-Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

- Então o valor actual dessa renda será:

$$\text{Valor Actual} = (950-50) \cdot a_{\overline{3}|0,09} + 50 \cdot (Ia)_{\overline{3}|0,09} = 2278,16 + 245,87 = 2524,03 \text{ €}$$

Se aplicarmos directamente a fórmula atrás enunciada, de forma imediata obteríamos o mesmo resultado:

$$C = 950 \text{ €}; h = 50 \text{ €}; n = 3; i = 9\%$$

$$\text{Valor Actual} = (950 - 50) \cdot a_{\overline{3}|0,09} + 50 \cdot [\ddot{a}_{\overline{3}|0,09} - 3 \cdot (1 + 0,09)^{-3}] / 0,09 = 2524,03 \text{ €}$$



III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4-Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

- Renda variável em progressão aritmética decrescente:

**Exemplo:** A Eduarda comprou um iPod pago em 4 mensalidades normais de 40, 30, 20 e 10e.  $i_M = 1.2\%$ . Qual o valor em Dívida? ( $h = -10$ )

$$\begin{aligned}
 &= 40(1,012)^{-1} + 30(1,012)^{-2} + 20(1,012)^{-3} + 10(1,012)^{-4} \\
 &= 10(1,012)^{-1} + 10(1,012)^{-2} + 10(1,012)^{-3} + 10(1,012)^{-4} \\
 &+ 10(1,012)^{-1} + 10(1,012)^{-2} + 10(1,012)^{-3} + \\
 &+ 10(1,012)^{-1} + 10(1,012)^{-2} + \\
 &+ 10(1,012)^{-1} + \\
 &+ 10 a_{4|1.2\%} + 10 a_{3|1.2\%} + 10 a_{3|1.2\%} + 10 a_{4|1.2\%} \\
 &10 * \frac{4 - a_{4|1.2\%}}{1.2\%} \\
 &97.65 \text{ €}
 \end{aligned}$$

III - Rendas

1- Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

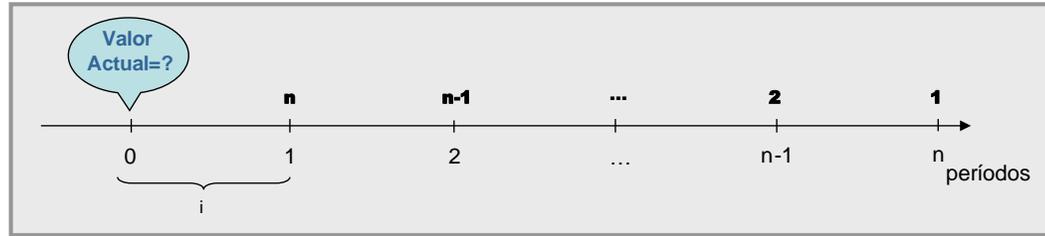
3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

4- Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

- Genericamente, consideremos uma renda cujos termos constituam uma progressão aritmética decrescente de razão 1 e cujo último termo seja também unitário -  $(Da)_{n|i}$ :



$$(Da)_{n|i} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} + v^n +$$

$$v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} +$$

$$v + v^2 + v^3 + \dots +$$

...

$$v + v^2 + v^3 +$$

$$v + v^2 +$$

$$v =$$

$$= a_{n|i} + a_{n-1|i} + \dots + a_{3|i} + a_{2|i} + a_{1|i}$$

III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

4-Rendas de  
termos  
variáveis

5- Rendas  
Perpétuas

6 -- Rendas  
Fraccionadas

Substituindo as expressões  $a_{n|i}$  pelas respectivas fórmulas e simplificando:

$$\begin{aligned} (Da)_{\overline{n}|i} &= \frac{1-v^n}{i} + \dots + \frac{1-v^3}{i} + \frac{1-v^2}{i} + \frac{1-v^1}{i} = \\ &= \frac{1 + \dots + 1 + 1 + 1 - (v^1 + v^2 + v^3 + \dots + v^n)}{i} \end{aligned}$$

Obtém-se a seguinte fórmula:

$$(Da)_{\overline{n}|i} = \frac{n \cdot a_{\overline{n}|i}}{i}$$

Ou no caso das rendas de último termo e razão igual a h:

$$h \cdot (Da)_{\overline{n}|i} = h \cdot \frac{n \cdot a_{\overline{n}|i}}{i}$$

## III - Rendas

1- Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

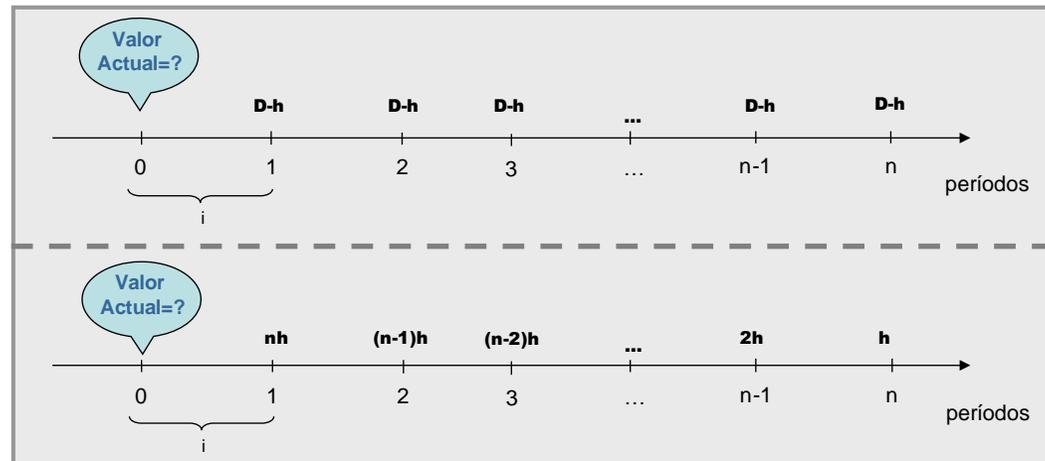
3- Rendas de termos constantes

4- Rendas de termos variáveis

5- Rendas Perpétuas

6 -- Rendas Fraccionadas

- Progressão aritmética decrescente de razão  $h$  e último termo  $D$





III -Rendas

1- Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4- Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

- Em termos globais, quando o último termo (D) não é igual à razão (h), o valor actual calcula-se da seguinte forma:

$$\text{Valor Actual} = (D - h) \cdot a_{\overline{n}|i} + h \cdot (Da)_{\overline{n}|i}$$

Em que:

$$h \cdot (Da)_{\overline{n}|i} = h \cdot \frac{(n - a_{\overline{n}|i})}{i}$$

III -Rendas

1-Conceitos e Classificação

2- Valor Actual e Acumulado

3- Rendas de termos constantes

5- Rendas Perpétuas

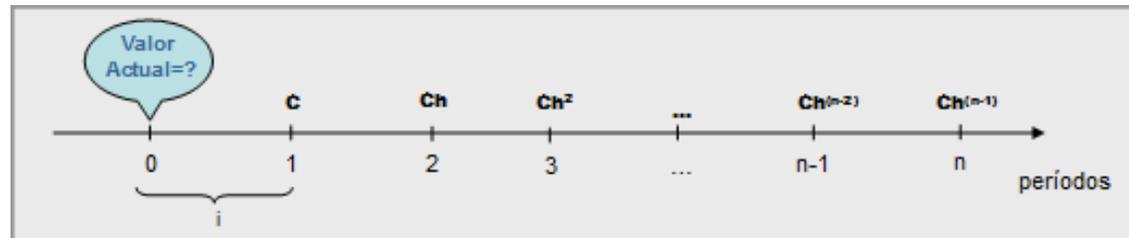
4-Rendas de termos variáveis

6 -- Rendas Fraccionadas

- Renda variável em progressão geométrica

**Exemplo:** O João comprou um computador portátil, que pagará em três prestações anuais (com juros incluídos), sendo a primeira igual a 950,00 € e as restantes com um acréscimo de 25% relativamente à anterior. A empresa vendedora financia a compra à taxa de 9% ao ano. Se o João quisesse pagar o computador, na sua totalidade, no momento da compra, quanto deveria ter desembolsado?

Suponhamos uma renda cujos termos veriem em progressão geométrica, com o primeiro termo igual a  $C$  e de razão  $h$ . Se  $h > 1$ , a renda é crescente; se  $0 < h < 1$ , é uma renda decrescente.





III -Rendas

1-Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4-Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

$$\text{Valor actual} = Cv + Chv^2 + Ch^2v^3 + \dots + Ch^{n-1}v^n$$

Colocando C em evidência, obtém-se uma progressão geométrica de razão hv. Logo, a soma dos termos de uma progressão geométrica, temos que:

$$\text{Valor actual} = C \cdot \frac{v - h^{n-1} * v^n * hv}{1 - hv}$$

Ou,

$$\text{Valor actual} = C \cdot \frac{1 - h^n(1 + i)^{-n}}{1 + i - h}$$

III -Rendas

1- Conceitos e  
Classificação

2- Valor Actual  
e Acumulado

3- Rendas de  
termos  
constantes

5- Rendas  
Perpétuas

4- Rendas de  
termos  
variáveis

6 -- Rendas  
Fraccionadas

- **Rendas Fraccionadas:** renda de termos constantes com um número finito de termos em que o período da taxa de juro é diferente do período da renda. O período da taxa será portanto igual a  $x$  períodos da renda ( $x=1$  renda inteira).



Solução mais simples: calcular a taxa de juro equivalente referenciada ao período da renda

**Exemplo:** Qual é o valor actual de uma dívida que vai ser reembolsada em 3 anos através de 6 prestações semestrais normais de 400 cada, sendo a taxa de juro anual de 9%.