

# INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

## ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 11 de Junho de 2013

Duração: 2 horas

### I

1. Considere o PVI, 
$$\begin{cases} 2tx \log x + (t^2 + x^2 \sqrt{1+x^2})x' = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$
.

a) (1,5) Mostre que a equação não é exacta mas admite um factor integrante da forma  $\mu(x)$ . Determine-o.

b) (2,5) Resolva o PVI.

2. Pretende-se conhecer a função  $x(t)$  tal que  $x(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tz}}{1+z^2} dz$ , com  $t > 0$ .

a) (1,5) Mostre que a função dada satisfaz a equação diferencial  $x'' + x = \frac{1}{t}$ .

b) (2,0) Resolva a equação diferencial.

3. Considere o sistema de equações diferenciais não lineares

$$\begin{cases} x' = 4y - x^3 \\ y' = -3x - y^3 \end{cases}$$

a) (1,0) Determine os pontos de equilíbrio do sistema.

b) (2,0) Mostre que (0,0) é um ponto de equilíbrio não hiperbólico do sistema.

c) (2,0) Estude a estabilidade da solução de equilíbrio nula, provando que:

c1)  $V(x, y) = 3x^2 + 4y^2$  é uma função de Liapunov.

c2) É aplicável o Método de Liapunov.

## II

Considere o seguinte PVI nas duas formas:

$$(1) \begin{cases} y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases} \quad (2) Y_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} Y_t \wedge Y^0 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- a) **(1,5)** Mostre que (1) e (2) são equivalentes.  
b) **(2,0)** Determine a solução do problema (2).

## III

Considere a função  $f(z) = \frac{z - 2i}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2}$ .

- a) **(1,0)** Determine e classifique as singularidades de  $f$ .  
b) **(1,5)** Calcule os respectivos resíduos.  
c) **(1,5)** Determine o valor do integral  $\int_{|z|=1} f(z) dz$ .

fim