INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Recurso – 1 de Julho de 2013

Duração: 2 horas

I

1. Considere o sistema de equações diferenciais não lineares

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2^3 \\ x'_2 = x_2^2 \end{cases}.$$

a) (1,0) Discuta a existência e unicidade de solução para o sistema.

b) (2,0) Determine a solução $\Phi(t)$ do sistema que satisfaz as condições iniciais $\Phi_1(-1) = 0,\ \Phi_2(-1) = 1$.

c) (1,0) Indique o intervalo máximo de existência de solução.

2. Considere a equação diferencial linear de 2ª ordem $x'' + \frac{1}{4t^2}x = f(t)$ com $t > 0$ e *f* uma função real contínua.

a) (0,5) Verifique que $\phi_1(t) = \sqrt{t}$ é uma solução da equação homogénea associada.

b) (2,0) Determine $w : (0,+\infty) \to \Re$ de modo que ϕ_1 e $w\phi_1$ constituam um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada.

c) (1,5) Resolva a equação inicialmente dada, considerando $w(t) = \log t$.

3. Considere a família uniparamétrica de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = -3x + \frac{2}{3}y \\ y' = ax \end{cases}, \text{ com } a \in \Re.$$

a) **(1,0)** Determine os valores de a para os quais os valores próprios da matriz A associada ao sistema, são negativos e distintos.

b) **Faça a = - 3.**

b1) (2,0) Determine os vectores próprios da matriz A e utilize essa informação para esboçar o campo de vectores e retrato de fase.

b2) (2,0) Resolva o PVI, $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = (-1,1) \end{cases}$.

II

Obtenha as versões discretas análogas ao "Teorema Fundamental do Cálculo Integral" e à "Fórmula de Barrow", respectivamente, calculando:

a) **(1,0)** $\Delta\left(\sum_{j=n_0}^{n-1} x_j\right)$

b) **(2,0)** $\sum_{j=n_0}^{n-1} (\Delta x)_j$

III

Considere a função $f(z) = (z+2)^{-1}\left(z+\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

a) **(2,0)** Determine o valor do integral $\int_{|z|=1} f(z)dz$.

b) **(2,0)** Com base na alínea anterior, calcule $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$.

fim