INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 4 de Junho de 2014

Duração: 2 horas

I

1. Considere a equação diferencial $t^2 f(t)x' + x + e^{f(t)} = 0$, onde $f \in C^1(\Re^+)$.
   - **a)** **(2,0)** Encontre todas as possíveis funções $f(t)$ para as quais a equação diferencial é exacta.
   - **b)** **(1,5)** Resolva a equação diferencial fazendo $f(t) = \dfrac{t-1}{t^2}$.

2. Considere a equação diferencial

$$x''' + x'' + 4x' + 4x = 0.$$

   - **a)** **(2,0)** Para que condições iniciais $x(0), x'(0)$ e $x''(0)$, existe uma solução, não nula, $x(t)$ limitada para $t \geq 0$.
   - **b)** **(2,5)** Obtenha o sistema de EDOs equivalente à equação dada, e mostre que $\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & \cos 2t & sen2t \\ -e^{-t} & -2sen2t & 2\cos 2t \\ e^{-t} & -4\cos 2t & -4sen2t \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental de soluções para o sistema obtido.

3. Considere a seguinte função definida num aberto Ω de $\Re^2$,

$$U(x(t),y(t))=\frac{x^2}{2}y+\frac{y^4}{4}-xy+1.$$

- **a)** **(1,0)** Estabeleça o sistema de equações diferenciais não lineares de 1ª ordem, $X'=-\nabla U(X)$ onde $X(t)=\left[x(t) \quad y(t)\right]^T$.
- **b)** **(3,0)** Determine os pontos de equilíbrio do sistema encontrado na alínea anterior e classifique-os quanto à estabilidade.

II

A função $E_n(x)$ é definida pelo integral exponencial,

$$E_n(x)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t^n}dt\text{, onde } x>0 \text{ e } n\in\mathrm{N}.$$

a) **(2,0)** Mostre que $E_n(x)$ satisfaz a equação com diferenças $E_{n+1}(x)=\frac{1}{n}\left[e^{-x}-xE_n(x)\right]$.

b) **(2,0)** Calcule a solução geral da equação homogénea associada.

III

Considere a função complexa $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-6z+5}$.

- **a)** **(2,0)** Determine e classifique as singularidades da função.
- **b)** **(2,0)** Calcule o valor do integral $\int_\gamma f(z)dz$, onde γ é a elipse de equação $|z-2|+|z+2|=6$.

fim