



**INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO**

**ANÁLISE MATEMÁTICA IV**

Licenciatura MAEG

**Época Recurso** – 25 de Junho de 2014

Duração: 2 horas

**I**

1. Seja a equação diferencial não linear  $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$ .
- a) **(1,5)** Discuta a existência e unicidade de solução para a equação.
  - b) **(2,0)** Determine a solução  $\phi(t)$  da equação que satisfaz a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , e indique o intervalo máximo de existência de solução.

2. As equações lineares do tipo

$$a_0(bt+c)^n x^{(n)}(t) + a_1(bt+c)^{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(bt+c)x'(t) + a_n x(t) = 0,$$

onde todos os coeficientes  $a_i$ , com  $i = 0, \dots, n$ , são constantes,  $b \neq 0$  e  $c \in \mathfrak{R}$ , designam-se por *equações de Euler*. Através de uma adequada substituição de variável, aquelas equações reduzem-se a equações lineares com coeficientes constantes.

- a) **(2,0)** Faça  $n = 2$  e mostre que após a substituição de variável  $bt + c = e^s$  se obtém a equação linear de coeficientes constantes,

$$a_0 b^2 x''(s) + (a_1 b - a_0 b^2) x'(s) + a_2 x(s) = 0.$$

- b) **(1,5)** Utilizando a alínea anterior, determine a solução geral da equação de Euler,  $t^2 x''(t) + 2tx'(t) - 6x(t) = 0$ .

3. Considere o sistema linear de equações diferenciais  $x' = Ax$ , com  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

e  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ .

a) **(2,0)** Determine a matriz fundamental de soluções  $e^{At}$ .

b) **(2,0)** Utilize o resultado da alínea anterior para calcular a solução do PVI,

$$\begin{cases} x_1'' + 2x_1' + x_1 = 0 \\ x_1(0) = -1 \\ x_1'(0) = 1 \end{cases} .$$

4. **(3,0)** Determine os pontos de equilíbrio, e classifique-os quanto à estabilidade, do seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - \operatorname{sen} x \end{cases} .$$

## II

Investem-se 1000 euros num banco a uma taxa anual de 4% capitalizável mensalmente.

a) **(1,0)** Escreva uma equação com diferenças que traduza o valor do investimento em função do tempo.

b) **(1,5)** Resolva a equação obtida e diga qual o valor obtido ao fim de 15 anos.

c) **(1,0)** Ao fim de quanto tempo triplica a quantia inicial?

## III

**(2,5)** Calcule o valor do integral  $\int_{|z-1|=3} \frac{e^{\pi z^2}}{z^2 - z - 2} dz$ , aplicando as Fórmulas Integrais

de Cauchy e justifique convenientemente.

**fim**