

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Formulário**

Axiomática: P1.  $P(A) \geq 0$  P2.  $P(\Omega) = 1$  P3. Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2; \text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y); \rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y); \text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y); E(Y) = E_X[E(Y | X)];$$

Função geradora de momentos:  $M_X(s) = E(e^{sX})$ ;  $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

$$X \sim \text{Po}(\lambda) \Rightarrow f(x) = (e^{-\lambda} \lambda^x) / x! (\lambda > 0, x = 0, 1, \dots); X \sim B(n, \theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} (n > 1, x = 0, 1, \dots, n)$$

$$X \sim \text{Ex}(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x} (x > 0); \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}; S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2; (n-1)S'^2 = n S^2$$

$$X \sim \chi_{(n)}^2 \Rightarrow E(X) = n; \text{Var}(X) = 2n; X \sim N(0, 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi_{(1)}^2; X \sim G(n; \lambda) \Rightarrow 2\lambda X \sim \chi_{(2n)}^2;$$

$$X \sim N(0, 1) \text{ e } Y \sim \chi_{(n)}^2 \Rightarrow X / \sqrt{Y/n} \sim t_{(n)}$$

**[Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale -2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados  $\Omega$ .  
Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se acontecimentos A e B são independentes então não são incompatíveis	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se acontecimentos A e B são incompatíveis e $A \cup B = \Omega$ , então A e B formam uma partição de $\Omega$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $P(\bar{A}) = 1/6$ e $P(B) = 2/3$ então $P(A B) = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$P(A - B) = P(A) - P(B)$ se e só se $B \subset A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição  $F(x)$ , função probabilidade  $f(x)$  e  $a \in \mathbb{R}$   
Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
O conjunto $\{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\}$ é sempre finito	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ então $P(a \leq X < b) = F(b - 0) - F(a)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A variável aleatória $Y = \varphi(X)$ pode ser discreta, contínua ou mista	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$F(x)$ não é contínua à esquerda	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3. Seja  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta  $F_{X,Y}(x, y)$  e  $F_X(x)$ ,  $F_Y(y)$  função distribuição marginal de X e Y.  
Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Seja $\xi_\alpha$ o quantil de ordem $\alpha$ da v.a. X. Então se $\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow \xi_{\alpha_1} \leq \xi_{\alpha_2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ pode concluir-se que X e Y são v.a.(s) independentes	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A probabilidade condicionada $P(X \leq x   Y \leq y) = F_{X,Y}(x, y) / F_Y(y), F_Y(y) > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\text{Var}(X - 2Y) = \text{Var}(X) - 2\text{Var}(Y)$ se e só se X e Y forem independentes	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $X_1 \sim N(1,1)$ e $X_2 \sim N(2,1)$ , $X_1, X_2$ independentes então $(X_1 - 1)^2 + (X_2 - 2)^2 \sim \chi^2_{(2)}$		
Seja uma sucessão de $n$ provas independentes de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a $2/3$ . O número de sucessos nas $n$ experiências tem variância igual a $2n/3$		
Se $X_1 \sim G(2,1)$ e $X_2 \sim G(3,2)$ , $X_1, X_2$ independentes então $2X_1 + 4X_2 \sim \chi^2_{(10)}$		
Se $X \sim F(m, n)$ então $1/X \sim F(n, m)$		

5. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n), n > 2$ , uma amostra casual simples retirada de uma População  $X$  de parâmetros desconhecidos. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva

	V	F
A variância da média da amostra coincide com a variância da população		
$\frac{\text{Max}\{X_i\} - \text{Min}\{X_i\}}{2} - \mu$ é uma estatística		
A média da população é uma variável aleatória		
Se $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow P(\bar{X} > a) = P(\bar{X} < -a) \forall a \in \mathbb{R}$		

6. Seja uma variável aleatória  $X$  com função geradora de momentos  $M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$ . Dada uma amostra aleatória de dimensão 3, calcule o valor esperado de  $T = \sum_{i=1}^3 X_i$ . Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

7. Prove que se  $X$  e  $Y$  forem variáveis aleatórias discretas e independentes,  $E(Y|X = x_i) = E(Y)$   
[Cotação: 15]

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Formulário**

Axiomática: P1.  $P(A) \geq 0$  P2.  $P(\Omega) = 1$  P3. Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$ ;  $\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$ ;  $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ ;  $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$ ;  $E(Y) = E_X [E(Y | X)]$ ;

Função geradora de momentos:  $M_X(s) = E(e^{sX})$ ;  $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$ ;

$X \sim \text{Po}(\lambda) \Rightarrow f(x) = (e^{-\lambda} \lambda^x) / x!$  ( $\lambda > 0, x = 0, 1, \dots$ );  $X \sim B(n, \theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$  ( $n > 1, x = 0, 1, \dots, n$ )

$X \sim \text{Ex}(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ );  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ;  $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2$ ;  $(n-1)S^2 = n S^2$

$X \sim \chi_{(n)}^2$  então  $E(X) = n$ ;  $\text{Var}(X) = 2n$ ;  $X \sim N(0, 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi_{(1)}^2$ ;  $X \sim G(n; \lambda) \Rightarrow 2\lambda X \sim \chi_{(2n)}^2$ ;

$X \sim N(0, 1)$  e  $Y \sim \chi_{(n)}^2 \Rightarrow X / \sqrt{Y/n} \sim t_{(n)}$

**[Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale -2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10]

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva, de um espaço de resultados  $\Omega$ . Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se acontecimentos A e B são independentes então são sempre incompatíveis	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se acontecimentos A e B são independentes e $A \cup B = \Omega$ , então A e B formam uma partição de $\Omega$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $P(\bar{A}) = 1/6$ e $P(B) = 2/3$ então $P(A B) > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$P(A - B) = P(A) - P(B)$ se e só se $A \subset B$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição  $F(x)$ , função densidade de probabilidade  $f(x)$ . Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
O conjunto $\{x \in \mathcal{O} : P(X = x) > 0\} = \emptyset$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $a, b \in \mathcal{O}, a < b$ então $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a - 0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se a variável aleatória $Y = \varphi(X)$ então Y só pode ser contínua ou mista	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$F(x)$ é contínua em todo o seu domínio	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta  $F_{X,Y}(x, y)$  e  $F_Y(y)$  função distribuição marginal de Y.

Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Seja $\xi_\alpha$ o quantil de ordem $\alpha$ da v.a. X. Então se $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \xi_{\alpha_1} \leq \xi_{\alpha_2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $E(XY) \neq E(X).E(Y)$ pode concluir-se que X e Y não são v.a.(s) independentes	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A probabilidade condicionada $P(Y \leq y   X \leq x) = F_{X,Y}(x, y) / F_Y(y)$ , $F_Y(y) > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\text{Var}(X - 2Y) = \text{Var}(X) - 4\text{Var}(Y)$ se e só se X e Y forem independentes	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $X_1 \sim N(1,1)$ então $(X_1 - 1)^2 \sim \chi^2_{(2)}$		
Seja uma sucessão de $n$ provas independentes de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a $2/3$ . O número de sucessos nas $n$ experiências tem variância igual a $2n/9$		
Se $X_1 \sim G(1,2)$ e $X_2 \sim G(2,3)$ , $X_1, X_2$ independentes então $2X_1 + 3X_2 \sim \chi^2_{(6)}$		
Se $X \sim t_{(n)}$ e $Y \sim N(0; 1)$ então $E(X) = E(Y)$		

5. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n), n > 2$ , uma amostra casual simples retirada de uma População  $X$  de parâmetros desconhecidos.

Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow P(\bar{X} > a) = P(\bar{X} < -a) \forall a \in \mathbb{R}$		
$(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu) / \sigma\sqrt{n}$ é uma estatística		
A variância da amostra é uma variável aleatória		
A variância da média da amostra, se existir, tende para 0 quando a dimensão da amostra tende para infinito		

6. Seja uma variável aleatória  $X$  com função geradora de momentos  $M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$ . Dada uma amostra aleatória de dimensão 3, calcule o valor esperado de  $T = \sum_{i=1}^3 X_i$ . Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

7. Prove que se  $X$  e  $Y$  forem variáveis aleatórias discretas e independentes,  $E(Y|X = x_i) = E(Y)$

[Cotação: 15]

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Formulário**

Axiomática: P1.  $P(A) \geq 0$  P2.  $P(\Omega) = 1$  P3. Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$ ;  $\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$ ;  $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ ;  $\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y)$ ;  $E(Y) = E_X[E(Y | X)]$ ;

Função geradora de momentos:  $M_X(s) = E(e^{sX})$ ;  $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

$X \sim \text{Po}(\lambda) \Rightarrow f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$  ( $\lambda > 0, x = 0, 1, \dots$ );  $X \sim B(n, \theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$  ( $n > 1, x = 0, 1, \dots, n$ )

$X \sim \text{Ex}(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ );  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ;  $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2$ ;  $(n-1)S'^2 = n S^2$

$X \sim \chi_{(n)}^2$  então  $E(X) = n$ ;  $\text{Var}(X) = 2n$ ;  $X \sim N(0; 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi_{(1)}^2$ ;  $X \sim G(n; \lambda) \Rightarrow 2\lambda X \sim \chi_{(2n)}^2$ ;

$X \sim N(0; 1)$  e  $Y \sim \chi_{(n)}^2 \Rightarrow \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_{(n)}$

**[Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale -2,5. A classificação desta questão variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10]**

1. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de resultados  $\Omega$ , com probabilidade positiva. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $A \subset B$ os acontecimentos A e B são incompatíveis	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $P(\bar{A}) = P(B)$ então A e B formam uma partição de $\Omega$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $A = B$ então $P(A B) = P(A)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$P(A - B) = P(A) - P(B)$ se e só se $B \subset A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição  $F(x)$ , função probabilidade  $f(x)$ . Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
O conjunto $\{x \in \mathcal{X} : P(X = x) > 0\}$ pode não ser finito	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $a, b \in \mathcal{X}, a < b$ então $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a - 0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se a variável aleatória $Y = \varphi(X)$ então Y só pode ser discreta	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$F(x)$ pode ter uma infinidade de pontos de descontinuidade	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta  $F_{X,Y}(x, y)$  e  $F_X(x)$  função distribuição marginal de X.

Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Seja $\xi_\alpha$ o quantil de ordem $\alpha$ de uma v.a. X. Então se $\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow \xi_{\alpha_1} \geq \xi_{\alpha_2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $E(XY) = E(X).E(Y)$ pode concluir-se que X e Y são v.a.(s) dependentes	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A probabilidade condicionada $P(Y \leq y   X \leq x) = F_{X,Y}(x, y) / F_X(x)$ , $F_X(x) > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se X e Y forem dependentes então $E(X - 2Y) = E(X) - 2E(Y) - 2\text{Cov}(X, Y)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

V F

Se $X_1 \sim N(1,1)$ e $X_2 \sim N(2,1)$ , $X_1, X_2$ independentes então $(X_1)^2 + (X_2)^2 \sim \chi^2_{(2)}$		
Seja uma sucessão de $n$ provas independentes de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a $1/3$ . O número de sucessos nas $n$ experiências tem variância igual a $n/3$		
Se $X_1 \sim G(2; 1)$ e $X_2 \sim G(3; 2)$ , $X_1, X_2$ independentes então $X_1 + 2X_2 \sim \chi^2_{(10)}$		
Se $X \sim N(2; 1)$ e $Y \sim \chi^2_{(10)}$ são v.a.(s) independentes então $(X - 2)/\sqrt{Y/10} \sim t(10)$		

5. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n), n > 2$ , uma amostra casual simples retirada de uma População  $X$  de parâmetros desconhecidos.

Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

V F

Se a variância da média da amostra é igual a 0 a variância da população também é igual a 0		
$nS^2/\sigma^2$ é uma estatística		
A distribuição da amostra é $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = [P(X \leq x)]^n$		
A média da população é uma variável aleatória		

6. Seja uma variável aleatória  $X$  com função geradora de momentos  $M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$ . Dada uma amostra aleatória de dimensão 3, calcule o valor esperado de  $T = \sum_{i=1}^3 X_i$ . Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

7. Prove que se  $X$  e  $Y$  forem variáveis aleatórias discretas e independentes,  $E(Y|X = x_i) = E(Y)$

[Cotação: 15]

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas erradas descontam 0,5. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Formulário**

Axiomática: P1.  $P(A) \geq 0$  P2.  $P(\Omega) = 1$  P3. Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$Var(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$ ;  $Cov(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$ ;  $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ ;  $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab Cov(X, Y)$ ;  $E(Y) = E_X [E(Y | X)]$ ;

Função geradora de momentos:  $M_X(s) = E(e^{sX})$ ;  $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} (\lambda > 0, x = 0, 1, \dots)$ ;  $X \sim B(n, \theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} (n > 1, x = 0, 1, \dots, n)$

$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x} (x > 0)$ ;  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ;  $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2$ ;  $(n-1)S^2 = n S^2$

$X \sim \chi_{(n)}^2$  então  $E(X) = n$ ;  $Var(X) = 2n$ ;  $X \sim N(0; 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi_{(1)}^2$ ;  $X \sim G(n; \lambda) \Rightarrow 2\lambda X \sim \chi_{(2n)}^2$ ;

$X \sim N(0; 1)$  e  $Y \sim \chi_{(n)}^2 \Rightarrow \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_{(n)}$

**[Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale -2,5. A classificação desta questão variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10]**

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados  $\Omega$ .  
Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $A \subset B$ os acontecimentos A e B não são independentes	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $P(A \cap B) = 0$ e $P(A \cup B) = 1$ então A e B formam uma partição de $\Omega$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $A = B$ então $P(A B) = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$P(A - B) = 0$ se e só se $B \subset A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. Seja X uma variável aleatória mista com função de distribuição  $F(x)$ , função densidade  $f(x)$   
Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
O conjunto $\{x \in \mathcal{X} : P(X = x) > 0\} = \emptyset$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $a, b \in \mathcal{X}, a < b$ e a ponto descontinuidade de então $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a - 0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se a variável aleatória $Y = \varphi(X)$ então Y não pode ser discreta	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$F(x)$ é contínua em todo o seu domínio	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta  $F_{X,Y}(x, y)$  e  $F_X(x)$  função distribuição marginal de X.  
Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Seja $\xi_\alpha$ o quantil de ordem $\alpha$ de uma v.a. X. Então se $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \xi_{\alpha_1} \geq \xi_{\alpha_2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se X e Y são v.a.(s) independentes pode concluir-se que $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A probabilidade condicionada $P(X \leq x   Y \leq y) = F_{X,Y}(x, y) / F_X(x)$ , $F_X(yx) > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$Var(X - 2Y) = Var(X) + 2Var(Y)$ se e só se X e Y forem independentes	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $X_1 \sim N(0,4)$ e $X_2 \sim N(0,1)$ , $X_1, X_2$ independentes então $(X_1/2)^2 + (X_2)^2 \sim \chi^2_{(2)}$		
Seja uma sucessão de $n$ provas de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a $1/3$ . O número de sucessos nas $n$ experiências tem variância igual a $n/9$		
Se $X_1 \sim G(1,1)$ e $X_2 \sim G(2,2)$ , $X_1, X_2$ independentes então $2X_1 + 4X_2 \sim \chi^2_{(6)}$		
Se $X \sim N(2; 4)$ e $Y \sim \chi^2_{(10)}$ são v.a.(s) independentes então $(X - 2)/\sqrt{Y/10} \sim t(10)$		

5. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n), n > 2$ , uma amostra casual simples retirada de uma População  $X$  de parâmetros desconhecidos.

Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Numa amostra de dimensão $n$ , $Var(\bar{X}) \neq Var(X)$		
$(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ é uma estatística		
A variância da população é uma variável aleatória		
A distribuição da amostra é $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = 1 - [P(X \leq x)]^n$		

6. Seja uma variável aleatória  $X$  com função geradora de momentos  $M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$ . Dada uma amostra aleatória de dimensão 3, calcule o valor esperado de  $T = \sum_{i=1}^3 X_i$ . Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

7. Prove que se  $X$  e  $Y$  forem variáveis aleatórias discretas e independentes,  $E(Y|X = x_i) = E(Y)$

[Cotação: 15]





Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Espaço reservado para classificações**

1a.(20)	2a.(10)	3a.(10)	3c.(20)	T:
1b.(10)	2b.(20)	3b.(10)	4. (20)	P:

1. Num inquérito sobre o emprego recentemente realizado aos casais de uma dada região obteve-se a seguinte informação: em 80% dos casais pelo menos um dos membros estava empregado; em 40% dos casais em que a mulher estava desempregada o marido partilhava a mesma situação; a percentagem de maridos com emprego era de 76%.

a) Qual a percentagem de casais em que ambos estão empregados?

b) Seleccionados 20 casais dessa região qual a probabilidade de que no mínimo 6 estejam ambos desempregados?

0.8254

0.1958

0.0867

0.8909

2. Seja  $(X, Y)$  uma v.a bidimensional com seguinte função densidade probabilidade conjunta:

$$f(x, y) = ky \quad (0 < x < y, 0 < y < 1).$$

a) Mostre que  $k=3$ .

b) Construa  $f(X|Y=y)$  e identifique o modelo probabilístico.

3. A chegada de clientes ao balcão de uma certa loja, entre as 10 e as 18 horas, segue um processo de Poisson com desvio padrão igual a dois.

a) Determine a probabilidade de nas duas primeiras horas chegar apenas um cliente.

0.7358

0.3033

0.3679

0.9098

b) Qual a probabilidade do primeiro cliente chegar depois das 12 horas?

0.3033

0.1335

0.7788

0.3679

c) Qual a probabilidade da soma dos tempos de espera por três clientes ser superior a 16 horas?

4. Seja uma população com distribuição uniforme no intervalo  $(0, 10)$ . Calcule a probabilidade de a média de uma amostra casual de dimensão 36 seleccionada desta população ser inferior a 3,7.



Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Espaço reservado para classificações**

1a.(20)	2a.(10)	3a.(10)	3c.(20)	T:
1b.(10)	2b.(20)	3b.(10)	4. (20)	P:

1. Num inquérito sobre o emprego recentemente realizado aos casais de uma dada região obteve-se a seguinte informação: em 80% dos casais pelo menos um dos membros estava empregado; em 40% dos casais em que a mulher estava desempregada o marido partilhava a mesma situação; a percentagem de maridos com emprego era de 76%.

a) Qual a percentagem de casais em que ambos estão empregados?

b) Seleccionados 15 casais dessa região qual a probabilidade de que pelo menos 4 estejam ambos desempregados?

0.3518

0.7499

0.8124

0.1642

2. Seja  $(X, Y)$  uma v.a bidimensional com seguinte função densidade probabilidade conjunta:

$$f(x, y) = ky \quad (0 < x < y, 0 < y < 1).$$

a) Mostre que  $k=3$ .

b) Construa  $f(X|Y=y)$  e identifique o modelo probabilístico.

3. A chegada de clientes ao balcão de uma certa loja, entre as 10 e as 18 horas, segue um processo de Poisson com desvio padrão igual a dois.

a) Determine a probabilidade de nas quatro primeiras horas chegar apenas um cliente.

0.4060

0.2707

0.3679

0.7358

b) Qual a probabilidade do primeiro cliente chegar depois das 13 horas?

0.2231

0.7768

0.5578

0.4724

c) Qual a probabilidade da soma dos tempos de espera por três clientes ser superior a 16 horas?

4. Seja uma população com distribuição uniforme no intervalo  $(0, 10)$ . Calcule a probabilidade de a média de uma amostra casual de dimensão 36 seleccionada desta população ser inferior a 3,7.



Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Espaço reservado para classificações**

1a.(20)	2a.(10)	3a.(10)	3c.(20)	T:
1b.(10)	2b.(20)	3b.(10)	4. (20)	P:

1. Num inquérito sobre o emprego recentemente realizado aos casais de uma dada região obteve-se a seguinte informação: em 80% dos casais pelo menos um dos membros estava empregado; em 40% dos casais em que a mulher estava desempregada o marido partilhava a mesma situação; a percentagem de maridos com emprego era de 76%.

a) Qual a percentagem de casais em que ambos estão empregados?

b) Seleccionados 20 casais dessa região qual a probabilidade de que pelo menos 8 estejam ambos desempregados?

0.9778

0.01

0.0321

0.9455

2. Seja  $(X, Y)$  uma v.a bidimensional com seguinte função densidade probabilidade conjunta:

$$f(x, y) = ky \quad (0 < x < y, 0 < y < 1).$$

a) Mostre que  $k=3$ .

b) Construa  $f(X|Y=y)$  e identifique o modelo probabilístico.

3. A chegada de clientes ao balcão de uma certa loja, entre as 10 e as 18 horas, segue um processo de Poisson com desvio padrão igual a dois.

a) Determine a probabilidade de nas duas primeiras horas chegarem dois clientes.

0.9856

0.1839

0.9197

0.0758

b) Qual a probabilidade do primeiro cliente chegar depois das 11 horas?

0.6065

0.7788

0.2231

0.3935

c) Qual a probabilidade da soma dos tempos de espera por três clientes ser superior a 16 horas?



4. Seja uma população com distribuição uniforme no intervalo  $(0, 10)$ . Calcule a probabilidade de a média de uma amostra casual de dimensão 36 seleccionada desta população ser inferior a 3,7.



Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Espaço reservado para classificações**

1a.(20)	2a.(10)	3a.(10)	3c.(20)	T:
1b.(10)	2b.(20)	3b.(10)	4. (20)	P:

1. Num inquérito sobre o emprego recentemente realizado aos casais de uma dada região obteve-se a seguinte informação: em 80% dos casais pelo menos um dos membros estava empregado; em 40% dos casais em que a mulher estava desempregada o marido partilhava a mesma situação; a percentagem de maridos com emprego era de 76%.

a) Qual a percentagem de casais em que ambos estão empregados?

b) Seleccionados 10 casais dessa região qual a probabilidade de que pelo menos metade estejam ambos desempregados?

0.9119

0.9736

0.0064

0.0328

2. Seja  $(X, Y)$  uma v.a bidimensional com seguinte função densidade probabilidade conjunta:

$$f(x, y) = ky \quad (0 < x < y, 0 < y < 1).$$

a) Mostre que  $k=3$ .

b) Construa  $f(X | Y=y)$  e identifique o modelo probabilístico.

3. A chegada de clientes ao balcão de uma certa loja, entre as 10 e as 18 horas, segue um processo de Poisson com desvio padrão igual a dois.

a) Determine a probabilidade de nas quatro primeiras horas chegarem 4 clientes.

0.9963

0.0153

0.9473

0.0902

b) Qual a probabilidade do primeiro cliente chegar depois das 14 horas?

0.6065

0.3679

0.1353

0.8647

c) Qual a probabilidade da soma dos tempos de espera por três clientes ser superior a 16 horas?

4. Seja uma população com distribuição uniforme no intervalo  $(0, 10)$ . Calcule a probabilidade de a média de uma amostra casual de dimensão 36 seleccionada desta população ser inferior a 3,7.