ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 2º semestre, EE** 03 **. 09. 12**

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

V1

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$;

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X^{(r)}(0)$; $X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$;

$X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$; $X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}$ $(x<0)$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$;

$S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$; $X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2}$, $s<\dfrac{1}{2}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
Se A e B são acontecimentos independentes então são incompatíveis		
Se $A\subset B\Rightarrow P(A)\leq P(B)$		
Se A e B incompatíveis e P(B)>0, então P(A|B) = 0		
P(A-B) > P(A)		

2. Considere a variável aleatória X e a respectiva função de distribuição $F_X(x)$. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
Sejam $a,c\in$ ℝ, $a<c$. Se X é uma variável aleatória discreta $P(a<X<c)=F(c)-F(a)$		
Se $\varphi(X)$ é uma função real de variável real, $Y=\varphi(X)$ pode ser uma variável aleatória discreta		
Se X é uma variável contínua então a respectiva função densidade de probabilidade pode assumir valores superiores a 1		
Se X é uma variável discreta então $\forall x,h\in$ ℝ, $F(x+h)\geq F(x)\Rightarrow h>0$		

3. Considere as variáveis aleatórias X e Y e a respectiva distribuição conjunta. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
Se $Cov(X,Y)=0$ então X e Y são independentes		
O coeficiente de correlação $\rho_{X,Y}$ pode ser igual à $Cov(X,Y)$.		
$E[(X-Y)^2]=E(X^2)+E(Y^2)-2E(X)E(Y)$		
Se $M_X(s)$ e $M_Y(s)$ são funções geradoras de momentos respectivamente de X e Y então $M_{X+Y}(s)=M_X(s)+M_Y(s)$ é função geradora de momentos da variável aleatória $X+Y$		

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então a $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ é independente de μ e σ .		
Se X e Y forem v.a.(s) iid com distribuição $N(0,1) \Rightarrow X^2 + Y^2 \sim \chi^2_{(2)}$.		
Se $Y = \sum_{i=1}^{m} X_i$ é o tempo que decorre até à *m*-ésima ocorrência num processo de Poisson, então Y tem distribuição Gama.		
Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e considere-se como sucesso o acontecimento $A = \{X < \mu\}$. Seja uma sucessão de n experiências aleatórias independentes. O número de sucessos nas n experiências tem variância igual a $n/4$		

5. Considere uma amostra casual $(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, obtida de uma população X . Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se a média da população não for conhecida então a média amostral não é uma estatística.		
Se $X \sim Po(1)$ e $n = 100$, então $P(\sum_{i=1}^{n} X_i < 100) = 1$		
A variância da média da amostra é inferior à variância da população.		
$F_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = [F_X(x)]^n$		

6. Se $X \sim Po(\lambda)$, **demonstre** que a sua média é igual a $\frac{P(X=1)}{P(X=0)}$ e a sua variância é igual ao dobro de $\frac{P(X=2)}{P(X=1)}$. [Cotação: 15]

7. Seja X uma variável aleatória e a existência de $E(X)$ e $Var(X)$. Usando a definição de variância de uma variável aleatória e as propriedades do valor esperado, demonstre que $Var(cX) = c^2 Var(X)$.

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(10)	3a.(10)	4a.(10)	T:
1b.(10)	2b.(20)	3b.(20)	4b..(20)	P:

Atenção: As respostas às questões abertas devem ser devidamente justificadas e formalizadas sob pena de serem penalizadas na cotação.

1. Para efeitos de previsão meteorológica da ocorrência diária de chuva (acontecimento C) em certa ilha consideram-se 3 níveis de pressão atmosférica, A-alta, M-média e B-baixa. A probabilidade de ocorrência de pressão baixa e chuva é de 20%. Além disso sabe-se que a pressão atmosférica é baixa em 60% dos dias em que chove e em 10% dos dias em que não chove.

a) Determine a probabilidade de chover dado que a pressão atmosférica é baixa.

a) Numa amostra casual de 10 dias, qual a probabilidade de, em pelo menos 6, ocorrer pressão baixa e chuva?

0,9736 ☐ 0,0064 ☐ 0,9945 ☐ 0,0009 ☐

2. Um comerciante abastece-se de determinada mercadoria a um preço X (em **centenas** de euros por tonelada) e revende-a a um preço Y (em **centenas** de euros por tonelada). A função densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x, y) = kx^2y \ \ (0 < x < y; \ \ 0 < y < 1)$$

a) Prove que $k = 15$.

b) Sabendo que o comerciante vendeu a mercadoria a 60 euros por tonelada, qual o valor esperado do preço a que o comerciante comprou a mercadoria?

3. O número de aviões que aterram, por hora, a um aeroporto é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de média 6.

a) Qual a probabilidade de num período de 10 minutos haver no mínimo duas aterragens?

0.0803 ☐ 0.2642 ☐ 0.6321 ☐ 0.8161 ☐

b) Acabou de aterrar um avião, qual a probabilidade do tempo que decorre até à 4ª aterragem seguinte exceder 50 minutos?

4. Durante o período de férias o montante diário (em euros) gasto por uma família é uma variável aleatória com distribuição normal, de média 80 e variância 100.

a) Qual a probabilidade de num dia de férias, a família gastar menos de 75 euros?

0.0039 ☐ 0.4801 ☐ 0.0352 ☐ 0.3085 ☐

b) Se se seleccionarem aleatoriamente 5 dias de férias desta família, determine a probabilidade de que o maior montante diário gasto tenha sido inferior a 75 euros?