ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 1º semestre, EE** **03 . 09. 13**

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

V1

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega) = 1$ P3. Se $A \cap B = \varnothing$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\text{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$;

$\text{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$; $X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\ (\lambda > 0, x = 0,1,\cdots)$;

$X \sim B(n,\theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} (n > 1, x = 0,1,\cdots,n)$; $X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x < 0)$; $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$;

$S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \overline{X}^2$; $(n-1)S'^2 = n S^2$; $X \sim \chi^2_{(n)}$ então $E(X) = n$; $\text{Var}(X) = 2n$; $M_X(s) = (1-2s)^{-n/2}, s < \dfrac{1}{2}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

<u>Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*</u>:

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.:

	V	**F**
Se A e B são acontecimentos independentes então são incompatíveis		
Se $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$		
Se A e B incompatíveis e P(B)>0, então P(A|B) = 0		
P(A-B) > P(A)		

2. Considere a variável aleatória X e a respectiva função de distribuição $F_X(x)$.

	V	**F**
Sejam $a, c \in \mathbb{R}$, $a < c$. Se X é uma variável aleatória discreta $P(a < X < c) = F(c) - F(a)$		
Se $\varphi(X)$ é uma função real de variável real, $Y = \varphi(X)$ pode ser uma variável aleatória discreta		
Se X é uma variável contínua então a respectiva função densidade de probabilidade pode assumir valores superiores a 1		
$S(x) = [1 - F(X)]$ é uma função não crescente.		

3. Considere as variáveis aleatórias X e Y e a respectiva distribuição conjunta.

	V	**F**
Se $Cov(X,Y) = 0$ então X e Y são independentes		
O coeficiente de correlação $\rho_{X,Y}$ pode ser igual à $Cov(X,Y)$.		
$E[(X-Y)^2] = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(X)E(Y)$		
Se existe $M_X(s)$, função geradora de momentos da variável aleatória X, então $M_X(0) = 1$.		

Vire se faz favor

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, então a $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)$ é independente de μ e σ .		
Se $X\sim U(0,1)$ e $0<a<b<1$ então $P(X<a\|X<b)=a/b$		
Se $X\sim N(0{,}25)$, então $(X/5)^2\sim\chi^2_{(1)}$		
Seja $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ e considere-se como sucesso o acontecimento $A=\{X<\mu\}$. Seja uma sucessão de n experiências aleatórias independentes. O número de sucessos nas n experiências tem variância igual a $n/4$		

5. Considere uma amostra casual $(X_1,\ldots,X_n)$, $n\geq 2$, obtida de uma população X . Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se a média da população não for conhecida então a média amostral não é uma estatística.		
Se $X\sim Po(1)$ e $n=100$, então $P(\sum_{i=1}^{n}X_i<100)\approx 1$		
A variância da média da amostra é inferior à variância da população.		
$F_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=[F_X(x)]^n$		

6. Se X tem distribuição uniforme no intervalo $(a,a+4)$ com $a\in\mathbb{R}$, mostre que a probabilidade de qualquer sub-intervalo (a,x) nele contido é igual a um quarto da respectiva amplitude. Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

7. Sejam 2 variáveis aleatórias independentes X e Y independentes, ambas com distribuição normal estandardizada e $Z=X+Y$. Demonstre que $\rho_{X,Z}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.. [Cotação: 15]

V1

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(10)	2a.(20)	3a.(10)	3c.(10)	T:
1b.(20)	2b.(20)	3b.(20)	4..(10)	P:

1. A empresa de desenvolvimento tecnológico NANIOTEC desenvolve produtos tecnológicos nas áreas da nanotecnologia e da biotecnologia. Sabe-se que 30% dos funcionários da empresa são formados na área da nanotecnologia. Sabe-se ainda que se um funcionário for formado em nanotecnologia, a probabilidade dele ter também formação em da biotecnologia é de 40% e que se não for formado em nanotecnologia, a probabilidade dele ter formação em biotecnologia é de 80%.

a) Considere uma amostra casual de 16 funcionários da empresa. Qual a probabilidade de mais de metade destes funcionários terem formação em nanotecnologia?

0,9743 ☐ 0,0257 ☐ 0,9256 ☐ 0,0744 ☐

b) Sabendo que um funcionário tem formação em biotecnologia, calcule a probabilidade de ter também formação em nanotecnologia?

2. Um comerciante abastece-se de determinada mercadoria a um preço X (em centenas de euros por tonelada) e revende-a a um preço Y (em centenas de euros por tonelada). A função densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x, y) = kx^2y \ \ (0 < x < 1; \ \ 0 < y < 1)$$

a) Prove que $k = 6$ e calcule a probabilidade de o preço de revenda ser superior ao dobro do preço de compra.

b) Sabendo que o comerciante comprou a mercadoria a 60 euros por tonelada, qual o valor esperado do preço a que o comerciante vende a mercadoria? O que pode concluir sobre a independência entre os preços de compra e de revenda?

3. Suponha que o número de golos marcados pelo campeão nacional da liga de futebol segue um processo de Poisson de taxa média 2,7 golos por jogo (considera-se que um jogo tem precisamente 90 minutos)..

a) Qual a probabilidade de esta equipa marcar pelo menos 10 golos no total dos 3 primeiros jogos da temporada, sabendo que marcou 4 golos no 1º jogo?.

0,5461 ☐ 0,2983 ☐ 0,7017 ☐ 0,4539 ☐

b) Qual a probabilidade de que o tempo total necessário para esta equipa marcar 35 golos não exceda os 900 minutos?

c) Seleccionou-se uma amostra aleatória de dimensão 3 do número de golos por jogo. Qual a probabilidade de o maior número de golos registado ter sido inferior ou igual a 3?

4. O volume de vendas mensal (em milhares de euros da empresa AEKI pode ser modelado por uma distribuição normal de média 100 e variância 64. Qual a probabilidade do volume de vendas em determinado mês ser superior à média mas inferior a 106 mil euros?

0,7340 ☐ 0,2734 ☐ 0,7734 ☐ 0,2340 ☐