ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 2º semestre, EE** **10. 09. 14**

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X^{(r)}(0)$; $X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow f_X(x)=\boldsymbol{\lambda e^{-\lambda x}}$; $X\sim\chi^2_{(n)}$ então

$E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2},\ s<\dfrac{1}{2}$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S'^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n-1}$; $(n-1)S'^2=nS^2$;

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10.*

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva.*

1. Seja $\{A_1,A_2,A_3\}$ uma partição de Ω, com $P(A_i)>0$, $i=1,2,3$, e B e C dois acontecimentos em Ω.

	V	F
Se $B\subset A_2$, então $P(B)=P(B\mid A_2)\times P(A_2)$		
Se B e C são incompatíveis pode-se sempre escrever $P(B\cap C)=0$		
Se $P(B)>0$ e $P(C)>0$ e $B\subset C$, então pode garantir-se que $P(B\mid C)=1$		
Pode-se garantir que $P(A_1\cap A_3)=0$		

2. Seja X uma variável aleatória com função probabilidade ou densidade f_X e função distribuição $F(x)$.

	V	F
Se X for contínua, $f(x)$ tem domínio em $\Re$ e contradomínio em [0;1]		
Se X for discreta, $F(x)$ tem sempre um número finito de pontos de descontinuidade.		
Se X for variável aleatória mista, tem-se $0\leq F_X(x)\leq 1$		
Se X for contínua com $f(x)>0$ para $x>0$ e $Y=\begin{cases}0 & X\leq 1\\ X-1 & X>1\end{cases}$. Então Y é uma variável aleatória discreta		

3. Seja X uma variável aleatória de média μ e variância σ^2.

	V	F
A função geradora dos momentos $M_X(s)$verifica sempre $M_X(0)$=1		
Se X tiver uma distribuição normal e $Y=\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$, então a média e mediana de Y não podem coincidir.		
Pode-se garantir que $E[(X-\mu)^{2n+1}]=0$		
$Var(3-X)=Var(3+X)$		

vsff →

4. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$

	V	F
Se $F_{X,Y}(1.5,2)=1$, então $F_{X,Y}(2,0)\leq 1$		
Se X e Y são independentes então $f_{X\|Y=y}(x)=f_X(x)$ quando $f_Y(y)>0$		
Se X e Y forem independentes pode-se garantir que $\operatorname{cov}(X,Y)=0$		
Se X e Y forem independentes então X^2 e $Ln(Y)$ são também independentes		

5. Seja $(X_1,X_2,\cdots,X_n), n>2$, uma amostra casual simples retirada de uma população X

	V	F
Os elementos de uma amostra casual têm todos a mesma distribuição		
Existindo $\operatorname{var}(X)$, pode-se garantir que, qualquer que seja a distribuição de X, $E(S^2)<E(S'^2)$		
Se existir $\operatorname{var}(X)$, então pode-se garantir que $\operatorname{var}(\overline{X})$ existe		
Se o universo for normal então a média da população coincide com a média da amostra.		

6. Sendo A e B dois acontecimentos definidos no espaço Ω, prove que se $P(B|A)=P(B)$, então $P(A|B)=P(A)$. **Justifique todos os passos**. [Cotação: 15]

7. Seja $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ uma amostra casual extraída de um universo X com distribuição exponencial de parâmetro $\boldsymbol{\lambda}$. Obtenha a função densidade de probabilidade conjunta $f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. **Justifique todos os passos.**
[Cotação: 15]

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____ **Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\text{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\text{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY)=a^2\text{Var}(X)+b^2\text{Var}(Y)+2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$; $X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow f_X(x)=\boldsymbol{\lambda e^{-\lambda x}}$; $X\sim\chi^2_{(n)}$ então

$E(X)=n$; $\text{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2}$, $s<\dfrac{1}{2}$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S'^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n-1}$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

1. Seja $\{A_1,A_2,A_3\}$ uma partição de Ω, com $P(A_i)>0$, $i=1,2,3$, e B e C dois acontecimentos em Ω.

	V	F
Se $B\subset A_2$, então $P(B)=P(B\mid A_2)\times P(A_2)$		
Se B e C são independentes pode-se sempre escrever $P(B\cap C)=0$		
Se $P(B)>0$ e $P(C)>0$ e $C\subset B$, então pode garantir-se que $P(B!\,C)=1$		
Pode-se garantir que $P(A_1\cap A_3)=0$		

2. Seja X uma variável aleatória com função probabilidade ou densidade f_X e função distribuição $F(x)$

	V	F
Se X for discreta, $f(x)$ tem domínio em $\Re$ e contradomínio em [0;1]		
Se X for contínua então $F(x)$ não tem pontos de descontinuidade		
Se X for variável aleatória mista então pode ter-se $F_X(x)>1$		
Se X for contínua com $f(x)>0$ para $x>0$ e $Y=\begin{cases}0 & X\leq 3\\ X-3 & X>3\end{cases}$. Então Y é uma variável aleatória mista		

3. Seja X uma variável aleatória média μ e variância σ^2

	V	F
A função geradora dos momentos $M_X(s)$pode não verificar $M_X(0)$=1		
Se X tiver uma distribuição normal e $Y=\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$, então a média e mediana de Y coincidem.		
Pode-se garantir que $E[(X-\mu)^{2n}]>0$		
$Var(X-3)\neq Var(X+3)$		

vsff →

4. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$.

	V	F
Se $F_{X,Y}(1.5,2)=1$, então $F_{X,Y}(2,3)=1$		
Se X e Y independentes então $f_{X\|Y=y}(x)=f_X(x)$ quando $f_Y(y)>0$		
Se $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ pode-se garantir que X e Y são independentes		
Se X e Y forem independentes então X^2 e Y^2 são também independentes		

5. Seja $(X_1,X_2,\cdots,X_n), n>2$, uma amostra casual simples retirada de uma população X.

	V	F
Os elementos de uma amostra casual têm todos a mesma distribuição		
Existindo $\operatorname{var}(X)$, pode-se garantir que, qualquer que seja a distribuição de X, $E(S'^2) > E(S^2)$		
A existência de $\operatorname{var}(X)$ não garante que $\operatorname{var}(\overline{X})$ existe		
Se a população for normal então a média da amostra coincide com a média da população.		

6. Sendo A e B dois acontecimentos definidos no espaço Ω, prove que se

$P(B|A)=P(B)$, então $P(A|B)=P(A)$. **Justifique todos os passos**. [Cotação: 15]

7. Seja $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ uma amostra casual extraída de um universo X com distribuição exponencial de parâmetro $\boldsymbol{\lambda}$. Obtenha a função densidade de probabilidade conjunta $f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. **Justifique todos os passos.** [Cotação: 15]

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – , 2º semestre, EE 10. 09. 14

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**_________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(15)	3a.(10)	4 (10)	**T:**
1b.(10)	2b.(20)	3b.(15)	5 (20)	P:

Nota: As questões de Verdadeiro e Falso descontam – 2,5 se erradas.

1. Um armazenista recebe lotes de vinho de três produtores, A, B e C. Dos lotes recebidos 40% vêm de A, 30% de B e os restantes de C. Depois de recebidos, os lotes são submetidos ao controle de qualidade e, conforme o resultado, são divididos em lotes *Premium* e lotes *Normais*. Do passado sabe-se que 60% dos lotes provenientes de A são de qualidade *Premium*, 12% dos lotes provem de B e são *Premium* e que 60% dos lotes em armazém são *Premium.*

a. Qual a probabilidade de um lote *Premium* ser proveniente do produtor C?

b. Seleccionados ao acaso 10 lotes do armazém, determine a probabilidade de no mínimo 6 serem de qualidade *Premium?*

0.6331 ☐ 0.7993 ☐ 0.3823 ☐ 0.7492 ☐

2. O fornecimento e o consumo de água, por dia em centenas de m^3, num conselho, é uma v.a. bidimensional (X, Y), sendo X o fornecimento e Y o consumo, com a seguinte f.d. probabilidade conjunta:

$$f(x,y) = \frac{k(3-x)}{3}, \text{ quando } 0 < x < 3,\ 0 < y < x \quad \text{e} \quad f(x,y) = 0 \text{ nos outros casos.}$$

a) Mostre que $k = \frac{2}{3}$.

b) Determine o consumo médio de àgua num dia em que são fornecidos 200 m^3 de água a esse concelho.

3. O número de consultas a um determinado *site* segue um processo de Poisson com intensidade média de 12 por hora.

a. Qual a probabilidade de decorrerem mais de 10 minutos entre duas consultas consecutivas?

0.1353 ☐ 0.8187 ☐ 0.1813 ☐ 0.8647 ☐

b. Determine a probabilidade de decorrerem mais de 2 horas até se registarem 20 consultas do site.

4. Com base na informação recolhida em anos anteriores, sabe-se que, por ano, é de 0.005 a probabilidade de um indivíduo, residente numa determinada região, contrair uma doença rara designada por Síndrome de Nagi. Sabendo que nessa região residem 1200 pessoas, qual a probabilidade de num ano menos de 3 pessoas contraírem essa doença?

0.1512 ☐ 0.0446 ☐ 0.0892 ☐ 0.0620 ☐

5. O tempo (em minutos) que um professor demora a corrigir a parte prática de um exame de Estatística I pode ser modelado por uma variável aleatória com distribuição normal de média 15 e desvio padrão 3. Selecionou-se uma amostra casual de 9 destas provas. Calcule o limite superior para o tempo médio de correcção das 9 provas com uma probabilidade de 95%.

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – , 2º semestre, EE 10. 09. 14

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**_________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(15)	3a.(10)	4 (10)	**T:**
1b.(10)	2b.(20)	3b.(15)	5 (20)	P:

Nota: As questões de Verdadeiro e Falso descontam – 2,5 se erradas.

1. Um armazenista recebe lotes de vinho de três produtores, A, B e C, de modo que 40% dos lotes vêm de A, 30% de B e os restantes de C. Depois de recebidos, os lotes são submetidos ao controle de qualidade e, conforme o resultado, são divididos em lotes *Premium* e lotes *Normais*. Do passado sabe-se que 60% dos lotes provenientes de A são de qualidade *Premium*, 12% dos lotes provem de B e são *Premium* e que 60% dos lotes em armazém são *Premium.*

a. Qual a probabilidade de um lote *Premium* ser proveniente do produtor C?

b. Seleccionados ao acaso 10 lotes do armazém determine a probabilidade de no mínimo 6 sejam provenientes do produtor B*?*

0.0473 ☐ 0.8971 ☐ 0.9632 ☐ 0.0106 ☐

2. O fornecimento e o consumo de água, por dia em centenas de m^3, num conselho, é uma v.a. bidimensional (X, Y), sendo X o fornecimento e Y o consumo, com a seguinte f.d. probabilidade conjunta:

$$f(x,y) = \frac{k(3-x)}{3}, \text{ quando } 0 < x < 3,\ 0 < y < x \quad \text{e} \quad f(x,y) = 0 \text{ nos outros casos.}$$

a) Mostre que $k = \dfrac{2}{3}$.

b) Determine o consumo médio de àgua num dia em que foram fornecidos 200 m^3 de água a esse concelho.

3. O número de consultas a um determinado *site* segue um processo de Poisson com intensidade média de 12 por hora.

a) Qual a probabilidade de decorrerem mais de 5 minutos entre duas consultas consecutivas?

0.6321 ☐ 0.1813 ☐ 0.3679 ☐ 0.8187 ☐

b) Determine a probabilidade de decorrerem mais de 2 horas até se registarem 20 consultas do site.

4. Com base na informação recolhida em anos anteriores, sabe-se que, por ano, é de 0.005 a probabilidade de um indivíduo, residente numa determinada região, contrair uma doença rara designada por Síndrome de Nagi. Sabendo que nessa região residem 1200 pessoas, qual a probabilidade de num ano menos de 4 pessoas contraírem essa doença?

0.1512 ☐ 0.2851 ☐ 0.0892 ☐ 0.1339 ☐

5. O tempo (em minutos) que um professor demora a corrigir a parte prática de um exame de Estatística I pode ser modelado por uma variável aleatória com distribuição normal de média 15 e desvio padrão 3. Selecionou-se uma amostra casual de 9 destas provas. Calcule o limite superior para o tempo médio de correcção das 9 provas com uma probabilidade de 95%.