

**Instituto Superior de Economia e Gestão**

Análise Matemática II

**Licenciatura em MAEG**

Lista de Exercícios

Ano lectivo 2011-2012 (2º Semestre)

# 1 Séries de termos reais

**Exercício 1.1** Determine que valores de  $x$  tornam as séries seguintes convergentes e calcule a sua soma.

$$a) \sum_{n \geq 0} \left( \frac{x}{x+1} \right)^n \quad b) \sum_{n \geq 0} (1 - |x|)^n$$

$$c) \sum_{n \geq 0} x \quad d) \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^2 + n}.$$

**Exercício 1.2** Utilize a teoria das séries geométricas para calcular os racionais correspondentes às dízimas infinitas periódicas:

$$a) 3,66666(6) \quad b) 1,1818(18) \quad c) 1,0108(08)$$

$$d) 1,123(123) \quad e) 0,99999(9).$$

**Exercício 1.3** Calcule a soma das seguintes séries:

$$a) \sum_{n \geq 0} 3^{-(5n+1)} \quad b) \sum_{n \geq 2} \frac{2^n + 3^n}{6^n} \quad c) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$$

$$d) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} \quad e) \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{3}{2^n} \right)$$

**Exercício 1.4** Prove que se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existir e for finito, então a série  $\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n+k})$  é convergente e a sua soma é  $a_1 + a_2 + \dots + a_k - k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Exercício 1.5** Determine a natureza das seguintes séries e a soma das que são convergentes:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \quad b) \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^2 - 4} \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+k)}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$d) \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}} \quad e) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}.$$

**Exercício 1.6** Mostre que se  $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , e  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge, então  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$  é divergente.

**Exercício 1.7** Sendo  $a_n$  uma sucessão real tal que  $a_n \rightarrow +\infty$ , indique, justificando, a natureza da série  $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ .

**Exercício 1.8** Estude, utilizando o critério de comparação ou um dos seus corolários, a natureza das seguintes séries:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n \geq 2} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3 - 1} & b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}} & c) \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} \\
 d) \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{3 + (-1)^n} \right)^n & e) \sum_{n \geq 1} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} & f) \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 1} \\
 g) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\log n} & h) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^4 - 3n^2 - 1} & i) \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-1/n}}{n^k} \\
 j) \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{2} \right)^{n\sqrt{n}} e^n & k) \sum_{n \geq 1} \left( n \cdot \operatorname{sen} \frac{2}{n} \right)^{2n} & l) \sum_{n \geq 1} n^2 \left( \frac{2}{3} \right)^n \\
 m) \sum_{n \geq 1} \left( \frac{n+1}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{n+1} \right)^n & n) \sum_{n \geq 1} \left( \frac{n}{2n+3} \right)^{n\sqrt{n}} & o) \sum_{n \geq 1} \left( n \operatorname{sen} \frac{k}{n} \right)^{2n} \text{ com } |k| \neq 1 \\
 p) \sum_{n \geq 1} e^{-n} (\log n)^n & q) \sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n} e^{-n} & r) \sum_{n \geq 1} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} \\
 s) \sum_{n \geq 1} \frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)^3 \sqrt[3]{n^2+n}} & t) \sum_{n \geq 1} (n - \sqrt{n^2-1}) & u) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \left( \frac{9}{8} \right)^n \\
 v) \sum_{n \geq 1} n! \left( \frac{3}{4} \right)^{n^2} & w) \sum_{n \geq 1} n \frac{1}{(a^2+2)^n} & x) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left( \frac{10}{9} \right)^{n^2}.
 \end{array}$$

**Exercício 1.9** Sejam  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  duas séries convergentes de termos positivos. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

$$a) \sum \left( \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) \quad b) \sum \frac{n+1}{n} a_n.$$

**Exercício 1.10** Estude, quanto à natureza, a série de termo geral  $\frac{a^n}{1+b^n}$  nos seguintes casos:

- $0 < a < b$
- $0 < b \leq a < 1$
- $1 \leq b \leq a$ .

**Exercício 1.11** Sejam  $a_n$  e  $b_n$  duas sucessões de termos positivos tais que a série  $\sum a_n$  e a série  $\sum (b_n - b_{n+1})$  são convergentes. Mostre que a série  $\sum (a_n b_n)$  é uma série convergente.

**Exercício 1.12** Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as seguintes séries:

$$\begin{aligned}
 a) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} & \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (n^2 + 1)}{n^2 + n + 3} & \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{n^2 \sqrt{n}} & \quad d) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n + 1)!} \\
 e) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{6n - 5} & \quad f) \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left( \frac{2n + 1}{3n + 1} \right)^n & \quad g) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \log n}{n}.
 \end{aligned}$$

**Exercício 1.13** Considere a série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n + 1)^2}$ .

- a) Justifique que se trata de uma série convergente e calcule a soma da série com um erro inferior a 0,01.
- b) Indique um majorante do erro que comete quando aproxima a soma da série pela soma dos 3 primeiros termos.

**Exercício 1.14** Seja  $a_n$  uma sucessão tal que a série  $\sum a_n$  é absolutamente convergente.

Prove que a série  $\sum a_n^2$  também o é. Dê um exemplo que mostre que o recíproco não é verdadeiro.

**Exercício 1.15** Determine os intervalos de convergência das seguintes séries de potências:

$$\begin{aligned}
 a) \sum_{n \geq 1} (n + 1)^{-1/2} (x + 1)^n & \quad b) \sum_{n \geq 1} n (x - 2)^{n-1} & \quad c) \sum_{n \geq 1} \binom{n+4}{5} x^{4n} \\
 d) \sum_{n \geq 1} \frac{1.3 \dots (2n + 1)}{2.4 \dots (2n + 2)} \frac{1}{n + 1} (x - 1)^n.
 \end{aligned}$$

**Exercício 1.16** Calcule as somas das seguintes séries nos respectivos intervalos de convergência:

$$\begin{aligned}
 a) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} & \quad b) \sum_{n \geq 1} n x^n & \quad c) \sum_{n \geq 1} n^2 x^n \\
 d) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n + 1} (x - 1)^{2n+1} & \quad e) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n + 1)} (x - 1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

**Exercício 1.17** Desenvolva a função  $\log x$  em série de potências de  $x - 2$ , indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.

**Exercício 1.18** Desenvolva a função  $\frac{1}{x^2}$  em série de potências de  $x + 1$ , indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.

**Exercício 1.19** Considere a função  $f(x) = e^x$ .

- a) Calcule a sua série de MacLaurin e prove que a função é soma da sua série de Mac-Laurin para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .
- b) Com base na alínea anterior prove que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Exercício 1.20** Escreva o desenvolvimento de MacLaurin das seguintes funções:

a)  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$       b)  $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$       c)  $f(x) = \cos x$ .

**Exercício 1.21** Desenvolva em série de MacLaurin a função  $x \log(1 + x^3)$  e justifique que a função tem um mínimo no ponto  $x = 0$ .

**Exercício 1.22** Desenvolva em série de potências de  $x - 1$ , a função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2 \log(x^2)$ , indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.

**Exercício 1.23** Desenvolva em série de potências de  $x - 2$  a função  $\frac{4}{3x}$ , indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Utilize o resultado obtido para determinar o valor de  $f^{(17)}(2)$ .

**Exercício 1.24** Desenvolva em série de MacLaurin a função  $2^x + \frac{1}{2+x}$  e indique, justificando, o intervalo de convergência da série obtida.

**Exercício 1.25** Calcule o polinômio de Taylor de grau 2 da função  $f(x) = \int_1^{u(x)} \ln t \, dt$  no ponto  $x = 2$ , sabendo que a função  $u(x)$  é de classe  $C^2(\mathbb{R})$ , tem por contradomínio o conjunto  $[1, +\infty)$  e  $u(2) = 1$ .

**Exercício 1.26** Utilize a fórmula de MacLaurin para provar a fórmula do Binômio de Newton,

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

## 2 Noções Topológicas e Sucessões em $\mathbb{R}^n$

**Exercício 2.1** Considere o conjunto  $C([0, 1])$  das funções contínuas no intervalo  $[0, 1]$ . Defina para  $f, g \in C([0, 1])$ ,

$$d^*(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Mostre que  $d^*(f, g)$  define uma distância em  $C([0, 1])$ .

**Exercício 2.2** Considere o conjunto  $E$  um conjunto qualquer e defina para  $x, y \in E$ ,

$$d^*(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

(a) Mostre que  $d^*(x, y)$  é uma distância.

(b) Defina a bola de centro em  $a \in E$  e de raio  $\varepsilon$ .

**Exercício 2.3** Considere em  $\mathbb{R}^n$  as seguintes aplicações

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

(a) Mostre que todas estas aplicações definem normas em  $\mathbb{R}^n$ .

(b) Para cada uma das normas consideradas calcule  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

(c) Interprete geometricamente as distâncias calculadas.

**Exercício 2.4** Represente geometricamente os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  e defina analiticamente o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada um deles:

(a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x \leq 2 \text{ e } xy \geq 0\}$

(b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$

(c)  $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq y + x \leq 1 \right\}$

(d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \text{ e } y > 0\} \setminus \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 1 \text{ e } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

**Exercício 2.5** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Prove que

(a)  $A$  é um conjunto aberto se e só se  $A \cap \text{front}A = \emptyset$ .

(b)  $A$  é um conjunto aberto se e só se  $\mathbb{R}^n \setminus A$  é um conjunto fechado.

(c) Prove, utilizando o resultado anterior, que a intersecção de conjuntos fechados é sempre um conjunto fechado.

**Exercício 2.6** Considere o seguinte conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$ .

- (a) Dê um exemplo de uma sucessão de pontos que pertença a  $X$  que convirja para um ponto que não pertence a  $X$ .
- (b) Poderá encontrar uma sucessão de pontos que não pertencem a  $X$  convergente para um ponto de  $X$ ? Justifique.

**Exercício 2.7** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - \ln(x^2 + y^2)} + \sqrt{x - y}.$$

Determine o domínio de  $f$ ,  $D_f$ , represente-o geometricamente e diga, justificando, se  $D_f$  é um conjunto aberto e/ou fechado.

**Exercício 2.8** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{(1 - x)(1 - y)}.$$

- (a) Determine o domínio de  $f$ ,  $D_f$ , e represente-o geometricamente.
- (b) Defina analiticamente o interior e a fronteira de  $D_f$ .
- (c)  $D_f$  é um conjunto aberto? E fechado? Justifique.

**Exercício 2.9** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - (y + 1)^2)}.$$

- (a) Determine o domínio de  $f$ ,  $D_f$ , e represente-o geometricamente.
- (b) Defina analiticamente o interior e a fronteira de  $D_f$ .
- (c)  $D_f$  é um conjunto compacto? Justifique.

**Exercício 2.10** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(1 - \operatorname{sen} x)(y - x^2)}}{\ln(x + y - 2)}.$$

- (a) Determine o domínio de  $f$ ,  $D_f$ , e represente-o geometricamente.
- (b) Defina analiticamente a fronteira de  $D_f$ .
- (c)  $D_f$  é um conjunto aberto? E fechado? Justifique.

**Exercício 2.11** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \sqrt{(x - 2)(16 - x^2 - y^2)}.$$

(a) Determine o domínio de  $f$ ,  $D_f$ , e represente-o geometricamente.

(b) Indique, justificando, se  $D_f$  é um conjunto compacto.

**Exercício 2.12** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \ln(xy) \sqrt{(1 - x^2 - (y - 1)^2)}.$$

(a) Determine o domínio de  $f$ ,  $D_f$ , e represente-o geometricamente.

(b) Defina analiticamente a fronteira de  $D_f$  e indique, justificando, se  $D_f$  é um conjunto compacto.



### 3 Limites e continuidade em $\mathbb{R}^n$

**Exercício 3.1** Calcule ou prove que não existem os limites das seguintes funções nos pontos indicados:

$$\begin{array}{ll}
 a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x-1}{y-x+1} & b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
 c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y^2}{x-y} & d) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,0)} \frac{x+y-2}{xyz} \\
 e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2} & f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^3+y-1}{3x^3+y^3-1} \\
 g) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} & h) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,1)} \frac{y^2}{x} (z+3) \operatorname{sen}(4x) \\
 i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5}{x^4+2y^2} & j) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\log^2(x+y)}{\operatorname{sen}(\log(x+y))} \\
 k) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2-y^2-1}{x-1} & l) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2\sqrt{|y-1|}}{x^2+(y-1)^2} \\
 m) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,0)} \frac{z+(x-1)z+z^2}{1-xy+zx} &
 \end{array}$$

**Exercício 3.2** Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = (x^2 + y) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$ .

- (a) Justifique que não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  e não existe  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ .
- (b) Prove que existe limite da função no ponto  $(0, 0)$  e conclua que pode existir limite de uma função num ponto sem que existam os limites iterados.

**Exercício 3.3** Estude a continuidade das seguintes funções nos pontos indicados:

$$\begin{array}{l}
 a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{no ponto } (0, 0). \\
 b) g(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y^2}{(x-1)^2 + y^2} + y & \text{se } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (1, 0) \end{cases} \quad \text{no ponto } (1, 0). \\
 c) h(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{no ponto } (0, 0).
 \end{array}$$

**Exercício 3.4** Determine o valor do parâmetro real  $\alpha$  de modo que a seguinte função tenha limite no ponto  $(1, 1)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x + y} + \alpha & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } y \neq x \\ \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} - \alpha & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Exercício 3.5** Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = \frac{x^2}{x + y}$ .

- (a) Para cada  $m \in \mathbb{R}$  e cada  $k \in \mathbb{N}$  seja  $A_{k,m} = \{(x, y) \in D_f : y = mx^k\}$ . Calcule para cada par  $(k, m)$  o limite de  $f$  no ponto  $(0, 0)$  relativo ao conjunto  $A_{k,m}$ .
- (b) Considere o conjunto  $X = \{(x, y) \in D_f : y = -x + x^2\}$  e calcule o limite de  $f$  no ponto  $(0, 0)$  relativo ao conjunto  $X$ .
- (c) Que pode concluir sobre a existência de limite de  $f$  no ponto  $(0, 0)$ ?

**Exercício 3.6** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} k + \exp\left(-\frac{1}{|x^2 + y^2 - 4|}\right) & \text{se } x^2 + y^2 \geq 4 \\ 5 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}.$$

Determine o valor de  $k$  de modo a que a função seja contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercício 3.7** Verifique se as seguintes funções são prolongáveis por continuidade a  $\mathbb{R}^2$ :

$$(a) f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \qquad (b) f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(c) f(x, y) = \frac{x - y}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}} \qquad (d) f(x, y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

**Exercício 3.8** Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$ . A função pode ser prolongável por continuidade a  $\mathbb{R}^2$ ? Em caso afirmativo determine o prolongamento contínuo de  $f$ .

**Exercício 3.9** Determine os pontos de descontinuidade das funções assim definidas:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \\ 1 + y & \text{se } x = 0 \\ y & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad b) f(x, y) = (y^2 - 4y + 3) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

**Exercício 3.10** Considere a função  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x(2 - \operatorname{sen} x)}{1 - |y|}}$ .

- (a) Determine o domínio de  $f$ ,  $D_f$ , e represente-o geometricamente.
- (b) Defina analiticamente a fronteira de  $D_f$  e indique, justificando, se  $D_f$  é um conjunto aberto e/ou fechado.
- (c) Justifique se  $f$  é prolongável por continuidade ao ponto  $(0, 1)$ .

## 4 Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

**Exercício 4.1** Calcule as funções derivadas parciais de 1ª ordem para as seguintes funções, indicando o respectivo domínio:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(xy)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ y^2 - y & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} x^2 - yx & \text{se } x \neq y \\ x & \text{se } x = y \end{cases}$$

**Exercício 4.2** Considere a função  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verifique que a função tem derivadas parciais em todo o seu domínio mas não é contínua na origem.

**Exercício 4.3** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se } xy \neq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

(b) Prove que não existe  $f'_v(0, 0)$ , qualquer que seja o vector  $v \in \mathbb{R}^2$  tal que  $v_1 v_2 \neq 0$ .

(c) O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de  $f$  no ponto  $(0, 0)$ ?

**Exercício 4.4** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Mostre que  $f(tx, ty) = tf(x, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ .

(c) Utilize a alínea anterior para provar que  $f'_v(0, 0) = f(v)$  para todo  $v \in \mathbb{R}^2$ .

(d) Utilize a alínea anterior para calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

(e) Estude a diferenciabilidade de  $f$  no ponto  $(0, 0)$ .

**Exercício 4.5** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - x^3 y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Estude a continuidade de  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Calcule o gradiente de  $f$  no ponto  $(1, 1)$ .
- (c) Estude a diferenciabilidade de  $f$  no ponto  $(0, 0)$ .

**Exercício 4.6** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
- (b) Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  e mostre que são descontínuas em  $(0, 0)$ .
- (c) Verifique que  $f$  é diferenciável na origem.

**Exercício 4.7** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x-y)}{x+y} & \text{se } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x+y = 0. \end{cases}$$

- (a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
- (b) Existe  $\frac{\partial f}{\partial x}$  nos pontos da forma  $(a, -a)$  com  $a \neq 0$ ?
- (c) Calcule a função derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e estude a sua continuidade.
- (d) Calcule  $f'_{(1,-1)}(2, 3)$ .
- (e) Estude a continuidade de  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .
- (f) Estude a diferenciabilidade de  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .
- (g) Calcule  $\nabla f(1, 0)$ .
- (h) Calcule  $f'_{(1,1)}(0, 0)$  e  $f'_{(1,1)}(1, 0)$ .

**Exercício 4.8** Calcule a segunda diferencial de  $f(x, y) = \sqrt{xy}$  no ponto  $(1, 1)$ .

**Exercício 4.9** Seja  $h$  uma função diferenciável em  $\mathbb{R}$  e considere a função  $f$  definida por  $f(x, y) = tg(x)h(x + \cos y)$ . Mostre que para todo o ponto  $(x, y) \in D_f$ , se tem

$$\operatorname{sen} y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}.$$

**Exercício 4.10** Seja  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e considere a função  $g$  definida por  $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ . Mostre que para todo o ponto  $(x, y) \in D_g$ , se tem

$$x \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + y \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y).$$

**Exercício 4.11** Seja  $f$  uma função diferenciável em  $\mathbb{R}$  e considere a função  $g$  definida por  $g(x, y) = \cos^2 x \cdot f(y + tgx)$ . Prove que para todo o ponto  $(x, y) \in D_g$ , se tem

$$\frac{1}{\cos^2 x} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2tgx \cdot g(x, y).$$

**Exercício 4.12** Usando a regra da derivada da função composta, calcule  $\frac{dw}{dt}$  sabendo que

$$w = xyf(z), x = t^2, y = e^t, z = \ln t^2,$$

e  $f$  é uma função real de variável real diferenciável.

**Exercício 4.13** Seja  $F$  uma função real de variável real diferenciável e  $z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right)$ . Mostre que para todo o  $x \neq 0$ , se tem

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

**Exercício 4.14** Sejam  $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^2$  e  $z = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$ . Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

**Exercício 4.15** Seja  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função de classe  $C^1$  e  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $v(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)$ . Mostre que  $\phi = u \circ v$  é tal que

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

**Exercício 4.16** Considere as funções,  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(x, y, z) = (e^{x^2+y^2+z^2}, 1 - xyz^2)$  e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função cuja matriz jacobiana no ponto  $(e^3, 2)$  é dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz jacobiana de  $f \circ g$  no ponto  $(1, -1, 1)$ .

**Exercício 4.17** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $f(1) = f'(1) = 2$  e  $f(2) = f'(2) = 1$ . Considere  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $g(x, y, z) = (f(x^2) + f(x^2 + y^2), f(xyz))$ .

(a) Calcule a matriz jacobiana de  $g$ .

(b) Sendo  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x, y) = e^{3-x^2+yx}$ , justifique que  $h \circ g$  é diferenciável no ponto  $(1, 1, 2)$  e calcule a matriz jacobiana de  $h \circ g$  nesse ponto.

**Exercício 4.18** Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{5/3}y^2}{(x^2 + y^2)^{4/3}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

e seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $g(t) = (t, t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Considere ainda a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(t) = (f \circ g)(t) = f(t, t)$ .

(a) Indique o valor de  $F(t)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

(b) Calcule o valor de  $F'(0)$ : i) utilizando a expressão de  $F(t)$  obtida na alínea anterior; ii) através da regra da derivação da função composta.

(c) O que pode concluir do facto de ter obtido diferentes resultados nas alíneas i) e ii)?

**Exercício 4.19** Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 para a função  $f(x, y) = \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$  no ponto  $(0, 0)$  com resto de Lagrange.

**Exercício 4.20** Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 para a função  $f(x, y) = \frac{y}{y+x}$  no ponto  $(1, 0)$  com resto de Lagrange.

**Exercício 4.21** Determine os extremantes e correspondentes extremos das funções:

a)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^y$                       b)  $f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$

c)  $f(x, y, z) = xy + xz$                       d)  $f(x, y) = x\operatorname{sen}y$

e)  $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4$

**Exercício 4.22** Averigue se o ponto  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$  é extremante da função  $f(x, y, z) = x^2 + 2xy^2 + y^4 + z^2$ .

**Exercício 4.23** Determine, em função de  $\beta$ , os extremantes da função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y, z) = xy + xz - x^3 - y^2 - \beta x$ .

**Exercício 4.24** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = e^{xy+xy^2+x^2}$ . Determine os pontos críticos de  $f$  e classifique-os.

**Exercício 4.25** Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$ .

(a) Prove que os pontos críticos de  $f$  são  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  e  $(0, 0)$ .

(b) Indique, justificando, se os pontos  $(1, -1)$  e  $(-1, 1)$  são extremantes da função  $f$  e, caso sejam, determine os respectivos valores extremos.

(c) Prove que o ponto  $(0, 0)$  não é extremante da função  $f$ .

## 5 Análise Complexa

**Exercício 5.1** Determine 2 números complexos cuja soma seja 4 e cujo produto seja 8.

**Exercício 5.2** Calcule:

$$a) (1-i)^2(2+i) \quad b) \overline{1+i} \cdot (2-i) \quad c) \frac{i}{2+2i}$$

$$c) \left| \frac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(3-4i)} \right| \quad d) \frac{|1+i|(1+2i)}{1-i} \quad e) (1-\frac{i}{2})^2$$

**Exercício 5.3** Resolva em  $\mathbb{C}$  as seguintes equações

$$a) z^3 + 2z = 0 \quad b) z^3 + iz^2 - iz + 1 = 0$$

$$c) z^7 + z^4 - 16z^3 - 16 = 0 \quad d) z^2 + 2z + 3 = 0$$

**Exercício 5.4** Prove que se  $z \in \mathbb{C}$  é tal que  $|z| = 2$ , então  $\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \leq \frac{1}{3}$ .

**Exercício 5.5** Dados  $z_1, z_2 \neq 0$  em  $\mathbb{C}$ , prove que  $Re(z_1 z_2) = |z_1||z_2|$  se e só se  $arg(z_1) - arg(z_2) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercício 5.6** Mostre que para qualquer número complexo  $z$  se tem  $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)| \leq \sqrt{2}|z|$ . Indique exemplos de números complexos que verifiquem cada uma das igualdades.

**Exercício 5.7** Mostre que para qualquer número complexo  $z \neq 0$  se tem  $Re(z) > 0 \Leftrightarrow Re(1/z) > 0$ .

**Exercício 5.8** Escreva na forma trigonométrica cada um dos seguintes números complexos:

$$a) \frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} \quad b) (\cos \frac{1}{2} - i \sin \frac{1}{2})^2 \quad c) (1+i)^7$$

**Exercício 5.9** Prove que:

$$a) (-1+i)^7 = -8(1+i) \quad b) (1+\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+\sqrt{3}i)$$

**Exercício 5.10** Mostre que se  $z \neq 1$  se tem  $1+z+\dots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ .

**Exercício 5.11** Represente graficamente os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{C}$  e defina analiticamente o seu interior, fronteira e aderência. Refira também se são abertos, fechados, limitados e conexos.

$$a) \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 16\}$$

$$b) \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 4\}$$

$$c) z \in \mathbb{C} : |z+1| > |z-1+i|$$

$$d) \{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| + |Im(z)| \leq 1\}$$

$$e) z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, |arg(z)| < \frac{\pi}{4} \quad f) \{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) > 0\}$$



**Exercício 5.12** Estude quanto à sua natureza as seguintes sucessões de números complexos, indicando o limite das que forem convergentes.

$$a) z_n = (-1)^n + \frac{i}{n} \quad b) z_n = \frac{n + i(n+1)}{2n+2}$$

$$c) z_n = \frac{2^n}{n!} + i \frac{n}{2^n} \quad d) z_n = i^n$$

**Exercício 5.13** Determine os valores de  $z$  para os quais existem os limites seguintes:

$$a) \lim \frac{z^n}{n!} \quad b) \lim \left(\frac{z}{n}\right)^n \quad c) \lim z^n$$

**Exercício 5.14** Mostre que se as séries  $\sum x_n$  e  $\sum y_n$  forem absolutamente convergentes, então a série  $\sum(x_n + iy_n)$  também é absolutamente convergente.

**Exercício 5.15** Mostre que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$  é convergente se e só se  $|z| < 1$  e que nesse caso a soma da série é dada por  $1/(1-z)$ .

**Exercício 5.16** Estude quanto à convergência simples e absoluta as séries seguintes:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+i}{(n-1)!} \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{2n^2}$$

$$c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+i}{2^n} \quad d) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}\right)$$

**Exercício 5.17** Calcule, considerando quando necessário o ramo principal da função logaritmo.

$$a) e^{1-i} \quad b) \log(2i+2) \quad c) \log(-1)$$

$$c) 5^{i+1} \quad d) (\sqrt{3})^i \quad e) (1+i)(1-i)$$

$$f) \cos(i) \quad g) \sin(2i+1) \quad h) \tan(-\pi i)$$

$$i) \arccos(i)$$

**Exercício 5.18** Determine a parte real e imaginária das funções:

$$a) f(z) = z^2 + 3z - 2i \quad b) f(z) = \frac{z+2}{z-1} \quad c) f(z) = 3i\bar{z} + 4(i+z).$$

**Exercício 5.19** Resolva em  $\mathbb{C}$  as seguintes equações:

$$a) e^z = 1+i \quad b) e^z = -1 \quad c) \cos(z) = 2 \quad d) e^z = e^{iz}$$

**Exercício 5.20** Considerando que  $z = x + iy$ , calcule os seguintes limites:

$$a) \lim_{z \rightarrow -1+2i} (3xy + i(x-y)^2) \quad b) \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2-5}{iz} \quad c) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z(z^2+1)}{z-i}$$

**Exercício 5.21** Mostre que  $f$  é contínua em  $z_0$  se e só se  $\bar{f}$  é contínua em  $z_0$ .

**Exercício 5.22** Use o resultado do exercício anterior para concluir que se  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função contínua num certo ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$ , também os são as funções  $Re(f)$ ,  $Im(f)$  e  $|f|$ .

**Exercício 5.23** Determine o maior subconjunto de  $\mathbb{C}$  onde as seguintes funções são contínuas:

$$a) f(z) = \log(z + 1 - i) \quad b) f(z) = \sqrt{z^2 + 1} \quad c) f(z) = \frac{e^{z+1}}{z^2 + z + 1}$$

**Exercício 5.24** Determine o maior subconjunto de  $\mathbb{C}$  onde as seguintes funções são diferenciáveis

$$a) f(x+iy) = -(e^y - e^{-y})\cos x + i(e^y + e^{-y})\sin x \quad b) f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad c) \log_0(z+1)$$

**Exercício 5.25** Determine  $u(x, y)$  de modo que  $f(x + iy) = u(x, y) + i(x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2)$  seja holomorfa em  $\mathbb{C}$  e  $f(0) = 0$ .

**Exercício 5.26** Sejam  $u_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} (n \in \mathbb{N}_0)$  definidas por  $u(x, y) = x^k - y^k$ . Calcule os valores de  $k$  para os quais existem funções  $f_k$  holomorfas tais que  $\operatorname{Re}(f_k) = u_k$  e determine-as.

**Exercício 5.27** Determine as funções harmônicas conjugadas de  $w(x, y) = x^2 - 3x - y^2$ .