

Cálculo Estocástico – Mestrado em Matemática Financeira

Programa 2014/2015

1 - Introdução

- 1.1. Tópicos fundamentais e aplicações principais
- 1.2. Breve história do cálculo estocástico

2 – Conceitos básicos da Teoria da Probabilidade e de Processos Estocásticos

- 2.1. Processo estocástico. Definição e exemplos
- 2.2. Processo de Markov
- 2.3. Processos Gaussianos
- 2.4. Processo de incrementos estacionários e independentes
- 2.5. Processos equivalentes e indistinguíveis
- 2.6. Processos contínuos em probabilidade e em média de ordem p . Critério de continuidade de Kolmogorov
- 2.7. Esperança condicionada
- 2.8. Martingalas em tempo discreto
- 2.9. Transformada de martingala em tempo discreto
- 2.9. Martingalas em tempo contínuo

3 - Movimento Browniano

- 3.1. Movimento Browniano: Definição, continuidade e não diferenciabilidade das trajetórias
- 3.2. Principais propriedades do movimento Browniano
- 3.3. Processos relacionados com o movimento Browniano: Browniano com drift, Browniano geométrico e “ponte Browniana”
- 3.4. Variação quadrática do movimento Browniano

4 - Construção e propriedades do integral estocástico

- 4.1. Integral estocástico para processos simples
- 4.2. Propriedades do integral estocástico para processos simples
- 4.3. A isometria de Itô
- 4.4. O integral estocástico para processos adaptados, progressivamente mensuráveis e de quadrado integrável
- 4.5. Principais propriedades do integral estocástico indefinido: propriedade de martingala, variação quadrática.

5 - A fórmula de Itô

- 5.1. Processo de Itô
- 5.2. Fórmula de Itô unidimensional
- 5.3. Fórmula de Itô multidimensional
- 5.4. Exemplos de aplicação
- 5.5. Fórmula de integração por partes
- 5.6. Teorema de representação integral de Itô
- 5.7. Teorema da representação de martingala

6 - Equações diferenciais estocásticas (EDE's). Existência e unicidade de soluções.
Aproximações numéricas.

6.1. Motivação e exemplos

6.2. Primeiros exemplos: equação para o movimento Browniano geométrico e equação de Langevin associado ao processo de Ornstein-Uhlenbeck

6.3. Teorema de existência e unicidade de soluções.

6.4. Processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão para a média

6.5. Aplicação financeira: modelo de Vasicek para a taxa de juro

6.6. Equações diferenciais estocásticas lineares

6.7. Soluções fortes e soluções fracas de equações diferenciais estocásticas

6.8. Aproximações numéricas: método de Euler e método de Milstein

6.9. Integrais estocásticos de Stratonovich e EDE's de Stratonovich

7 - Relações entre equações diferenciais estocásticas e EDPs

7.1. Gerador ou operador infinitesimal de uma difusão

7.2. Representação estocástica de soluções de EDP's parabólicas

7.3. Fórmulas de Feynman-Kac

7.4. Relação entre a equação do calor e o movimento Browniano

8 - Teorema de Girsanov

8.1. Mudanças de medida de probabilidade

8.2. Teorema de Girsanov: versão elementar

8.3. Teorema de Girsanov: versão geral

9 - Modelos dos mercados financeiros (pricing de derivados)

9.1. O modelo de Black-Scholes

9.2. Derivados financeiros: avaliação pelo princípio de não arbitragem

9.3. A equação de Black-Scholes

9.4. A medida equivalente de martingala e a avaliação neutra face ao risco

9.4. A fórmula de Black-Scholes

Bibliografia principal

_B. Oksendal, Stochastic Differential Equations , Springer, 1998.

_T. Mikosch, Elementary Stochastic Calculus with Finance in view, World Scientific, 1998.

_D. Nualart, Stochastic Calculus (Lecture notes, Kansas University):
<http://www.math.ku.edu/~nualart/StochasticCalculus.pdf>

Bibliografia secundária

_Tomas Björk, Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press, 1998.

_P. E. Kloeden and E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer, 1992.

_I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd edition, Springer, 1991.

_Steven Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer, 2004.

_D. Revuz and M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion , Third Edition, Springer, 1999.

_Onofre Simões, Conceitos Básicos da Teoria da Probabilidade:
<http://cemapre.iseg.utl.pt/finmath/semin3a6.pdf>

Avaliação de Conhecimentos

Duas componentes:

- 1) Teste de avaliação (de duração 1 hora) a marcar para final de Abril ou início de Maio.
- 2) Exame Final, com consulta limitada a 5 folhas A4 (10 páginas) com apontamentos escritos pelo aluno.

Classificação Final = $\text{Max} \{0.35 * (\text{nota do teste de avaliação}) + 0.65 * (\text{nota do exame final}), \text{nota do exame final}\}$.